METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XIII/3, 2012, str. 243 – 252

O PEWNYCH KRYTERIACH INWESTOWANIA W OPCJE NA AKCJE

Tomasz Warowny
Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu
Politechnika Lubelska
e-mail: t.warowny@pollub.pl

Streszczenie: W artykule scharakteryzowano opcje na akcje. Wyjaśniono podstawowe pojęcia, takie jak: termin wykonania, termin wygaśnięcia, cena wykonania, cena opcji. Do opisu ewolucji cen akcji wykorzystano geometryczny ruch Browna. Sformułowano kilka problemów dotyczących inwestowania w opcje na akcje otrzymując zadania programowania stochastycznego. Korzystając z własności ruchu Browna pokazano, w jaki sposób szacować prawdopodobieństwa zdarzeń polegających na osiągnięciu przez inwestora zysków na żądanym poziomie lub przy ustalonym poziomie ryzyka. Dla każdego z zadań dokonano przykładowych obliczeń.

Słowa kluczowe: opcje na akcje, standardowy ruch Browna, geometryczny ruch Browna

WSTĘP

Opcje na akcje są jednym z najpopularniejszych instrumentów pochodnych na świecie. Umożliwiają one inwestorom osiągać zarówno ponadprzeciętne zyski, gdy cena wykonania opcji jest lepsza niż cena oferowana na wolnym rynku, jak i zabezpieczać się przed nadmiernymi stratami związanymi ze zmianami kursów akcji. Celem niniejszej pracy jest pokazanie, w jaki sposób można szacować prawdopodobieństwa osiągnięcia tych zysków z uwzględnieniem oczekiwań inwestora co do inwestycji w opcje.

CHARAKTERYSTYKA OPCJI

Opcja kupna (ang. call) jest kontraktem, który daje nabywcy prawo do kupna ustalonej ilości instrumentu podstawowego, na który opcja została wystawiona, po określonej cenie i w ustalonym terminie. Opcja sprzedaży (ang. put) daje prawo do sprzedaży instrumentu podstawowego po określonej cenie i w ustalonym terminie. Dla nabywcy opcja jest prawem, a nie obowiązkiem. Skorzysta z tego prawa, gdy będzie mu się to opłacało. Natomiast sprzedający (wystawiający) opcje ma obowiązek, na życzenie nabywcy opcji, odsprzedać (w przypadku opcji kupna) lub odkupić (w przypadku opcji sprzedaży) instrument podstawowy, na który opcja jest wystawiona.

Z inwestycjami w opcje wiąże się duże ryzyko. W związku z tym wystawca opcji musi złożyć depozyt zabezpieczający (ang. margin), który ma zagwarantować spełnienie jego ewentualnych zobowiązań [Luenberger 2003].

Termin, w którym posiadacz opcji wykorzystał swoje prawo nazywamy terminem wykonania (ang. exercise date). Termin, po którym opcja traci swoją ważność i nie może być wykonana nazywamy terminem wygaśnięcia opcji (ang. maturity, expiration date).

Wyróżnia się dwa typy opcji:

- europejskie, które mogą być wykonane tylko w dniu wygaśnięcia opcji,
- amerykańskie, które mogą być wykonane w dowolnym dniu do terminu wygaśnięcia opcji.

Nazwy obu typów nie są w żaden sposób związane z miejscem obrotu. Terminy te w przeszłości odnosiły się do różnych zasad handlu opcjami, jakie obowiązywały w Europie i Ameryce. Większość opcji, którymi handluje się na światowych rynkach to opcje amerykańskie. Powodem tego, między innymi, jest fakt, że opcje europejskie są bardziej narażone na manipulacje w okresie bliskim terminowi wygaśnięcia. [Weron, Weron 1998].

Cena instrumentu podstawowego ustalona w kontrakcie nazywa się ceną wykonania (ang. strike, exercise price). Jeżeli opcję opłaca się wykonać mówimy, że opcja jest w cenie (ang. in the money), np. w przypadku opcji sprzedaży dzieje się tak, gdy cena wykonania jest wyższa niż cena instrumentu podstawowego. Gdy cena instrumentu podstawowego jest równa cenie wykonania mówimy, że opcja jest po cenie (ang. at the money). Opcja nie jest w cenie (ang. out of the money), gdy nie opłaca się jej wykonać, np. w przypadku opcji sprzedaży dzieje się tak, gdy cena wykonania jest niższa niż cena instrumentu podstawowego.

Opcjami na światowych rynkach handluje się od dawna. Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie oferowane są wyłącznie opcje na indeks WIG 20. Opcje na akcje były notowane od października 2005 r., ale od 4 lipca 2007 r. zawieszono wprowadzanie do obrotu kolejnych serii opcji na akcje oraz zawieszono obrót wszystkimi seriami opcji na akcje.[1]

[1] www.gpw.pl/opcje_instrumenty

PROCES WIENERA I MODEL EWOLUCJI CENY AKCJI

Do opisu ewolucji ceny akcji posłuży proces geometrycznego ruchu Browna postaci:

$$p_t = p_o e^{\sigma w_t + \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \ t \geq 0,$$

gdzie:

p_t - cena akcji w chwili t,

p_o - cena akcji w chwili początkowej,

w_t - standardowy ruch Browna,

m, σ^2 - parametry modelu reprezentujące odpowiednio wartość średnią i wariancję (na jednostkę czasu) stopy zmiany ceny akcji.

Proces geometrycznego ruchu Browna ma następujące własności:

- jeżeli p_0 jest wartością dodatnią, to dla każdego $t > 0$ jest $p_t > 0$,
- dla każdego ustalonego $t > 0$ zmienna losowa p_t ma rozkład lognormalny,
- wariancja $Var[p_t] \to \infty$, gdy $t \to \infty$.

Jeżeli trajektoria ruchu Browna startuje od dodatniej wartości, to proces osiąga tylko wartości dodatnie. Fakt ten, jak również to, że dla procesów opartych na rozkładzie Gaussa jest dobrze rozwinięty aparat matematyczny, zadecydował, że właśnie ten proces wielu badaczy rynku przyjmuje do opisu ewolucji cen papierów wartościowych. Wykorzystali go, między innymi, Osborne, Samuelson, których prace w latach pięćdziesiątych dokonały przełomu w matematyce finansowej. Z modelowaniem stochastycznym rynków kapitałowych związane są też takie nazwiska jak: Merton, Blaska, Scholesa.

Proces geometrycznego ruchu Browna jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego.

$$dp_t = p_t[mdt + \sigma dw_t].$$

Więcej na temat ruchu Brona można znaleźć w [Banek 2000], [Luenberger 2003], [Sobczyk 1996], [Weron, Weron 1998].

Proces stochastyczny $\{w_t, t \geq 0\}$, w literaturze spotyka się też oznaczenie $w(t,\omega)$, nazywamy standardowym procesem Wienera lub standardowym ruchem Browna, jeżeli:

1. $w_0 = 0$.
2. Przyrost standardowego procesu Wienera na przedziale o długości Δt ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną 0 i wariancją równą długości tego przedziału, czyli dla każdego $t \geq 0$, $\Delta t > 0$ jest $(w_{t+\Delta t} - w_t) \sim N(0, \Delta t)$.
3. Jeżeli $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, to zmienne losowe $(w_{t_2} - w_{t_1})$ i $(w_{t_4} - w_{t_3})$ są niezależne.
4. Funkcja $t \longrightarrow w(t,\omega) \in \Re$ jest z prawdopodobieństwem równym 1 ciągła względem t, czyli proces Wienera ma ciągłe trajektorie.

W dalszej części pracy wykorzystane zostaną poniższe własności procesu Wienera.

Własność 1
Niech $a > 0$ i $b \in R$, wtedy

$$P\left(\max_{t \leq T} w_t \geq bt + a\right) = 1 - F\left(\frac{a + bT}{\sqrt{T}}\right) + e^{-2ab}\left(1 - F\left(\frac{a - bT}{\sqrt{T}}\right)\right),$$

gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.
Dowód powyższej własności można znaleźć w [Szirajev, Kabanov, Kramkov, Mielnikov 1994].
W szczególności, gdy $b = 0$ otrzymujemy

Własność 2 [Billingsley 1987]

$$P\left(\max_{t \leq T} w_t \geq a\right) = 2\left(1 - F\left(\frac{a}{\sqrt{T}}\right)\right) = 2P(w_T \geq a).$$

W tym miejscu warto przytoczyć wzór Blacka-Scholesa na wycenę opcji na akcje. Rozważmy europejską opcję kupna z ceną wykonania q i terminem wygaśnięcia T. Zakładamy, że akcja, na którą została wystawiona opcja nie daje dywidendy w okresie $[0,T]$, stopa wolna od ryzyka (r) jest stała i ma miejsce kapitalizacja ciągła. Wtedy wzór na cenę opcji (cena ta nazywana jest też premią) w chwili $t \in [0,T]$ jest następujący [Luenberger 2003]:

$$c_t^E = p_t F(d_1) - q e^{-r(T-t)} F(d_2),$$

gdzie:

c_t^E - cena europejskiej opcji kupna w chwili t,

p_t - cena akcji w chwili t,

F - dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{p_t}{q} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{p_t}{q} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Znając cenę europejskiej opcji kupna (c_t^E) cenę europejskiej opcji sprzedaży (s_t^E) można wyznaczyć z parytetu kupna-sprzedaży [Weron, Weron 1998]:

$$c_t^E - s_t^E = p_t - q e^{-r(T-t)}.$$

W [Weron, Weron 1998] pokazano, że w przypadku opcji amerykańskich prawdziwe są nierówności:

$$p_t - q < c_t^A - s_t^A \leq p_t - q e^{-r(T-t)},$$

gdzie c_t^A, s_t^A oznaczają odpowiednio ceny amerykańskich opcji kupna i sprzedaży akcji.

WYBRANE KRYTERIA INWESTOWANIA W OPCJE NA AKCJE

Sformułowanych zostanie kilka problemów związanych z inwestowaniem w opcje na akcje. Oszacujemy prawdopodobieństwa zdarzeń osiągnięcia przez inwestora zysku na żądanym poziomie lub przy ustalonym poziomie ryzyka.

Zadanie 1 – ustalony poziom zysku, europejska opcja kupna

Inwestor posiada europejską opcję kupna akcji z terminem wygaśnięcia T i ceną rozliczenia opcji q. Obliczmy

$$P\left(e^{-rT}(p_T - q) \geq z\right).$$

Jest to prawdopodobieństwo tego, że rozliczając opcje w chwili T inwestor osiągnie zysk co najmniej z. Wielkość zysku jest zdyskontowana na chwilę obecną ze stopą kapitalizacji ciągłej r. Ustalając wartość z inwestor powinien uwzględnić poniesione koszty, takie jak: koszty transakcji, cenę opcji.

W przypadku europejskiej opcji sprzedaży należałoby rozważyć prawdopodobieństwo $P\left(e^{-rT}\left(q-p_T\right)\geq z\right)$. Zajmijmy się przypadkiem opcji kupna.

Mamy

$$P\left(e^{-rT}\left(p_T-q\right)\geq z\right)=P\left(e^{-rT}\left(p_o e^{\sigma w_T+\left(m-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}-q\right)\geq z\right)=$$

$$=P\left(w_T\geq\frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT}+q}{p_o}\right)-\left(m-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\right)=1-F\left(C_T\right),$$

gdzie

$$C_T=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT}+q}{p_o}\right)-\left(m-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right],$$

F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Przykład

Niech początkowa cena akcji będzie równa 50 zł. Inwestor nabywa europejską opcję kupna tej akcji z ceną wykonania 50 zł i terminem wygaśnięcia za rok. Stopa wolna od ryzyka dla tego okresu to 6%.

Zatem $p_o=50$, $q=50$, $r=0{,}06$, $T=1$.

Załóżmy ponad to, że stopa zmiany ceny akcji i odchylenie standardowe tej stopy są równe odpowiednio $m=0{,}08$, $\sigma=0{,}1$.

Korzystając ze wzoru Blacka-Scholesa otrzymujemy, że cena opcji wynosi $c^E=3{,}73$ zł.

Przyjmijmy $z=5$. Obliczymy, zatem prawdopodobieństwo tego, że za rok inwestor wykona posiadaną opcję z ceną wykonania 50 zł i natychmiast sprzedając akcję po aktualnej cenie rynkowej osiągnie zysk zdyskontowany na chwilę obecną na poziomie co najmniej 5 zł. Rozważane prawdopodobieństwo ma wartość

$$P\left(e^{-rT}\left(p_T-q\right)\geq z\right)=0{,}398$$

Zadanie 2 - ustalony poziom ryzyka, europejska opcja kupna

Inwestor nieskłonny do dużego ryzyka może ustalić jego maksymalną wartość i szukać takiej wielkości zysku, która może być zrealizowana z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż ustalił. Zadanie można sformułować w następującej postaci.

Niech $\rho \in [0,1]$ będzie ustaloną przez inwestora liczbą, którą będziemy nazywać poziomem ryzyka. Należy wyznaczyć taką wartość z_ρ, że

$$z_\rho = \max\left\{z : P\left(e^{-rT}(p_T - q) \geq z\right) \geq 1 - \rho\right\}.$$

Powyższa wartość jest największym poziomem zysku, jaki można osiągnąć przy ustalonym poziomie ryzyka ρ.

Z poprzedniego zadania wiemy, że

$$P\left(e^{-rT}(p_T - q) \geq z\right) = 1 - F(C_T),$$

gdzie

$$C_T = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT} + q}{p_o}\right) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right].$$

Zatem

$$1 - F(C_T) \geq 1 - \rho$$

lub równoważnie

$$C_T \leq F^{-1}(\rho).$$

Mamy

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT} + q}{p_o}\right) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \leq F^{-1}(\rho),$$

więc

$$z \leq p_o e^{\sigma\sqrt{T}F^{-1}(\rho) + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} - r\right)T} \text{-} qe^{-rT}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$z_\rho = p_o e^{\sigma\sqrt{T}F^{-1}(\rho) + \left(m - \frac{\sigma^2}{2} - r\right)T} \text{-} qe^{-rT}.$$

Przykład

Dla wartości takich jak w poprzednim przykładzie: $p_o = 50$, $q = 50$, $r = 0{,}06$, $T = 1$, $m = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}1$ przyjmijmy, że inwestor ustalił poziom ryzyka $\rho = 0{,}3$. z_ρ jest zatem maksymalną wartością (zdyskontowaną) zysku jaki można osiągnąć z prawdopodobieństwem równym co najmniej 0,7. Z powyższego wzoru otrzymujemy $z_\rho = 1{,}07$.

Zadanie 3 – ustalony poziom zysku, amerykańska opcja kupna

Rozważmy amerykańską opcję kupna akcji z terminem wygaśnięcia T i ceną wykonania opcji q. Oszacujemy następujące prawdopodobieństwo:

$$P\left(\max_{o\le t\le T} e^{-rt}\left(p_t - q\right)\ge z\right).$$

Jest to prawdopodobieństwo tego, że do terminu wygaśnięcia opcji inwestor będzie mógł wykonać opcję i osiągnie zysk zdyskontowany na chwilę obecną na poziomie co najmniej z.
Mamy

$$P\left(\max_{o\le t\le T} e^{-rt}\left(p_t - q\right)\ge z\right)= P\left(\max_{o\le t\le T} w_t \ge \frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT}+q}{p_o}\right)-\left(m-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]\right)$$

Oznaczmy

$$B(t)=\frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{ze^{rt}+q}{p_o}\right)-\left(m-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]$$

i niech $B=\min_{o\le t\le T} B(t)$

Prawdopodobieństwo, że trajektoria procesu Wienera „dojdzie” do krzywej $B(t)$ jest nie większe niż prawdopodobieństwo, że trajektoria procesu Wienera „dojdzie” do B. Stąd i z własności 2 otrzymujemy

$$P\left(\max_{o\le t\le T} w_t \ge B(t)\right)\le P\left(\max_{o\le t\le T} w_t \ge B\right)=2P\left(w_T\ge B\right)=2\left(1-F\left(\frac{B}{\sqrt{T}}\right)\right),$$

gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Łatwo sprawdzić, że

$$B''(t)=\frac{qzr^2e^{rt}}{\sigma\left(ze^{rt}+q\right)^2},$$

czyli, dla każdego $t\ge 0$ jest $B''(t)>0$.
Druga pochodna funkcji $B(t)$ jest dodatnia, a więc funkcja jest wypukła. Jej wykres na przedziale $[0,T]$ znajduje się pod prostą zawierającą punkty $(0,B(0))$ i $(T,B(T))$. Przyjmijmy, że prosta ta ma równanie $l(t)=a+bt$.
Wartość współczynnika a to $B(0)$, czyli

$$a=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{z+q}{p_o}.$$

Natomiast wartość współczynnika b wyliczymy z równania $bT + a = B(T)$.
Mamy

$$bT + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{z+q}{p_o} = \frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{ze^{rT}+q}{p_o}\right) - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right],$$

co daje

$$b = \frac{1}{\sigma T}\left(\ln\frac{ze^{rT}+q}{z+q} - \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right).$$

Prawdopodobieństwo, że na przedziale $[0,T]$ trajektoria ruchu Browna „dojdzie” do krzywej $B(t)$ jest, zatem większe niż prawdopodobieństwo, że trajektoria ruchu Browna „dojdzie” do prostej $l(t)$. Korzystając z własności 1 mamy

$$P\left(\max_{o\le t\le T} e^{-rt}(p_t - q) \ge z\right) = P\left(\max_{o\le t\le T} w_t \ge B(t)\right) \ge P\left(\max_{o\le t\le T} w_t \ge a + bt\right) =$$

$$= 1 - F\left(\frac{a+bT}{\sqrt{T}}\right) + e^{-2ab}\left(1 - F\left(\frac{a-bT}{\sqrt{T}}\right)\right).$$

Oczywiście, musi być $a > 0$, czyli $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{z+q}{p_o} > 0$ więc $z + q > p_o$.

Gdyby było inaczej, $z + q \le p_o$, oznaczałoby to, że już w chwili zerowej inwestor rozliczając opcję i natychmiast sprzedając akcje osiągnąłby wymagane z.
Ostatecznie otrzymaliśmy

$$1 - F\left(\frac{a+bT}{\sqrt{T}}\right) + e^{-2ab}\left(1 - F\left(\frac{a-bT}{\sqrt{T}}\right)\right) \le P\left(\max_{o\le t\le T} e^{-rt}(p_t - q) \ge z\right) \le 2\left(1 - F\left(\frac{B}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

ze wszystkimi oznaczeniami jak wcześniej.

Przykład
Inwestor posiada amerykańską opcję kupna z terminem wygaśnięcia jeden rok, z ceną rozliczenia 50 zł, taką samą jak obecna cena akcji. Mamy, zatem $p_o = 50$, $q = 50$, $T = 1$. Załóżmy ponad to, że stopa zmiany ceny akcji i odchylenie standardowe tej stopy są równe odpowiednio $m = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}1$, stopa wolna od ryzyka $r = 0{,}06$. Inwestor ustala $z = 5$.

Oszacujemy, zatem prawdopodobieństwo tego, że w ciągu roku inwestor będzie mógł wykonać opcję i osiągnie zysk zdyskontowany na chwilę obecną na poziomie co najmniej 5 zł. Dla powyższych wartości otrzymujemy

$$0{,}58 \le P\left(\max_{o\le t\le T} e^{-rt}(p_t - q) \ge z\right) \le 0{,}79.$$

ZAKOŃCZENIE

Opcje dają możliwość tworzenia różnych strategii inwestycyjnych na wypadek różnych scenariuszy rozwoju wydarzeń na giełdzie. Zaprezentowane kryteria mają zastosowanie do oceny inwestycji w opcje na akcje. Mogą one być pomocne inwestorowi przy ocenie wartości prawdopodobieństw osiągnięcia oczekiwanych zysków lub szacowaniu przyszłych zysków przy ustalonym poziomie ryzyka. Pokazano, w jaki sposób szacować te prawdopodobieństwa zarówno dla opcji amerykańskich jak i europejskich.

BIBLIOGRAFIA

Banek T. (2000) Rachunek ryzyka, Centrum Badawczo-Szkoleniowe WSZiA w Zamościu, Lublin.

Billingsley P. (1987) Prawdopodobieństwo i miara, PWN, Warszawa.

Luenberger D., G. (2003) Teoria inwestycji finansowych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Sobczyk K. (1996) Stochastyczne równania różniczkowe, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Szirajev A.N., Kabanov J.M., Kramkov D.O., Mielnikov A.B., (1994) K teorii raszczotov opcionov Evropejskogo i Amerikanskogo tipov, Nepreryvnoje vremia - Teoria verojat. i promen., Tom 39.

Weron A., Weron R., (1998) Inżynieria finansowa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

SOME CRITERIA OF INVESTMENT IN STOCKS OPTIONS

Abstract: This article describes the stock options. It explains the basic concepts, such as settlement date, expiration date, strike price and premium. To describe the evolution of share prices we used the geometrical Brownian motionWe presented the several criteria for investment in options and shares and then obtained the exercises of stochastic programming. Using the properties of Brownian motion, we explained how to estimate the probability of achieving the profit of desired amount or on fixed level of risk. For each of these criteria we presented the sample calculations

Keywords: stock options, Brownian motion, geometrical Brownian motion