

Agata Gluzicka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
agata.gluzicka@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE PODEJŚCIA MIN-MAX DO WYBORU WIELOOKRESOWEGO PORTFELA INWESTYCYJNEGO

Streszczenie: Problemem każdego inwestora jest podjęcie decyzji, w które z dostępnych na rynku giełdowym spółek powinien zainwestować, aby osiągnąć maksymalny zysk przy minimalnym ryzyku. Kolejny problem to ile różnych spółek powinno znaleźć się w jego portfelu inwestycyjnym. W klasycznych modelach konstrukcji optymalnych portfeli inwestycyjnych zazwyczaj spółki wybierane są na podstawie danych dotyczących notowań giełdowych. Jednak na stopę zwrotu danej spółki wpływają różne czynniki, które w czasie trwania inwestycji ulegają zmianom.

W artykule zostanie omówiona dynamiczna metoda konstrukcji optymalnego portfela inwestycyjnego, w której spółki zostają wyselekcjonowane przez zastosowanie podejścia min-max dla wybranych wskaźników charakteryzujących spółkę. Metoda wyboru portfeli inwestycyjnych zostanie zastosowana do wybranych danych pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

Słowa kluczowe: wielookresowy portfel inwestycyjny, ryzyko inwestycyjne, podejście min-max.

Wprowadzenie

Problemem każdego inwestora jest podjęcie decyzji, w które z dostępnych na rynku giełdowym spółek powinien zainwestować, aby osiągnąć maksymalny zysk przy minimalnym ryzyku. Równie istotne jest ustalenie liczby spółek, które powinny znaleźć się w portfelu inwestora. W klasycznych modelach wykorzystywanych do konstrukcji optymalnych portfeli inwestycyjnych, spółki zazwyczaj wybierane są tylko na podstawie danych dotyczących notowań giełdowych, a dokładniej na podstawie stóp zwrotu. Jednak jak wykazały liczne badania empiryczne, na stopę zwrotu danej spółki wpływają różne czynniki, które w czasie trwania inwestycji ulegają zmianom.

W procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych ważnym elementem jest analiza podstawowych wielkości charakteryzujących papiery wartościowe. Celem takiej analizy jest selekcja i klasyfikacja spółek notowanych na giełdzie oraz ocena ich atrakcyjności pod względem inwestycyjnym. Analizę papierów wartościowych najczęściej przeprowadza się wykorzystując dane liczbowe określające kondycję ekonomiczno-finansową spółek. Przeprowadzenie analizy dla grupy dobrze dobranych wskaźników pozwala ocenić atrakcyjność spółki pod względem m.in. płynności, rentowności, zadłużenia czy sprawności zarządzania. W wielu badaniach podkreśla się, że wykorzystanie analizy wskaźnikowej w procesie inwestycyjnych jest zasadne przy inwestycjach długoterminowych.

Wciąż zwiększająca się liczba spółek na rynku giełdowym powoduje, że wybór odpowiednich walorów, w które warto zainwestować staje się coraz trudniejszym zadaniem. Jednym z pomocnych narzędzi, powszechnie wykorzystywanym do klasyfikacji spółek na podstawie wskaźników finansowych i rynkowych, jest wielowymiarowa analiza porównawcza, w szczególności metody taksonomiczne [Tarczyński, Łuniewska, 2004].

W artykule przedstawione zostało inne podejście wykorzystujące informacje o wskaźnikach finansowych. W pierwszej części artykułu zostanie omówiona dynamiczna metoda konstrukcji optymalnego portfela inwestycyjnego, w której spółki zostają wyselekcjonowane przez zastosowanie zmodyfikowanego podejścia min-max przedstawionego w pracy Dani i in. [2012]. W podejściu tym inwestor po określeniu liczby spółek, w jaką zamierza inwestować, dokonuje wyboru spółek na podstawie analizy wybranych wskaźników finansowych i rynkowych opisujących daną spółkę. Do wyznaczenia wartości udziałów dla wybranych spółek można stosować klasyczny model Markowitza, w którym celem jest minimalizacja ryzyka portfela. Zastosowanie podejścia min-max dla odpowiednio dobranych zmiennych fundamentalnych, pozwala na wyznaczenie portfeli o stopie zwrotu wyższej niż rynkowa stopa zwrotu [Dani i in., 2012]. Dynamika w tej metodzie polega na dokonywaniu przez inwestora zmian w portfelu w trakcie trwania inwestycji. Kapitał inwestycyjny jest ponownie lokowany w poszczególnych podokresach, co dodatkowo wpływa na wartość oczekiwanego zysku z portfela na koniec okresu inwestycyjnego.

W drugiej części artykułu został przedstawiony przykład empiryczny obrazujący zastosowanie omówionej metody wyboru portfeli inwestycyjnych. Wyniki stosowania podejścia min-max porównane zostały z wynikami stosowania modelu Markowitza dla zbioru spółek wyselekcjonowanych na podstawie wartości średnich stóp zwrotu. W przykładzie empirycznym wykorzystane zostały dane dla grupy wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

1. Model wyboru portfela inwestycyjnego wykorzystujący podejście min-max

Proces inwestycyjny jest zazwyczaj procesem długookresowym, a w czasie trwania inwestycji rynek giełdowy ulega licznym zmianom. Dlatego ważne jest dokonywanie zmian w składzie portfela, co przyczynia się do bardziej efektywnych wyników z inwestycji niż w przypadku jednorazowej wieloletniej alokacji kapitału. Co więcej, przeprowadzone dotychczas badania empiryczne wykazały, że z powodu błędów w estymacji stóp zwrotu, portfele wyznaczone dla długich okresów inwestycyjnych za pomocą modelu Markowitza są portfelami suboptymalnymi [DeMiguel, Garlappi i Uppal, 2009]. W przedstawianym poniżej podejściu problem został rozwiązany przez wyznaczenie optymalnych portfeli dla okresowej alokacji.

W konstrukcji portfela inwestycyjnego wykorzystującym podejście min-max zakłada się, że inwestor dysponuje kapitałem początkowym o wartości równej v_0 , który zamierza zainwestować na początku horyzontu czasowego. Dalej zakłada się, że na rynku giełdowym znajduje się N spółek, a inwestor chce zainwestować w K spółek, gdzie $K \leq N$. Po wyborze spółek następuje alokacja kapitału za pomocą standardowego modelu zaproponowanego przez Markowitza. Zakładamy dalej, że po dokonaniu inwestycji, inwestor przetrzymuje te spółki przez określony czas, po czym następuje ponowna alokacja kapitału.

Szczegółowy opis kolejnych kroków procedury wyznaczenia portfela inwestycyjnego przedstawiono poniżej [Dani i in., 2012]:

Krok 1: decyzja o liczbie akcji (K), w które chcemy zainwestować. W prezentowanej metodzie nie ma górnego ograniczenia na liczbę spółek, które powinny znaleźć się w portfelu. Zaleca się jednak stosowanie ograniczenia dolnego w postaci $K \geq 10$. Ograniczenie to związane jest z analizą licznych badań empirycznych dotyczących dywersyfikacji portfela, na podstawie których ustalono, że korzyści płynące z dywersyfikacji są zauważalne, jeśli portfel składa się z 10-50 składników [Evans i Archer, 1968; Tang, 2004; Goetzmann i Kumar].

Krok 2: decyzja, w które akcje chcemy zainwestować. Wybór spółek do portfela odbywa się na podstawie analizy zmiennych fundamentalnych, którymi w tym przypadku są wybrane wskaźniki finansowe danej spółki. W przypadku dużej liczby zmiennych fundamentalnych za pomocą analizy czynnikowej, możemy ograniczyć ich liczbę, wykorzystując do selekcji spółek tylko wskaźniki znaczące.

Poniżej przedstawiono procedurę selekcji spółek, w które należy inwestować. Oznaczmy przez f_i i -tą zmienną fundamentalną, a przez f_{ij} i -tą zmienną fundamentalną dla j -tej spółki (akcji). W ogólności wartości zmiennych fundamentalnych dla różnych spółek są nieporównywalne i dlatego przeprowadzamy

jest proces normalizacji, co pozwala sprowadzić wskaźniki do postaci porównywalnej. W normalizacji wartości zmiennych fundamentalnych wykorzystuje się wartość rynkową kapitalizacji danej spółki. Znormalizowana wartość i -tej zmiennej fundamentalnej dla j -tej spółki (fn_{ij}) obliczana jest następująco:

$$fn_{ij} = \frac{f_{ij}}{\text{rynkowa kapitalizacja } j\text{-tej akcji}}$$

Na podstawie znormalizowanych wartości zmiennych fundamentalnych dokonujemy wyboru K spółek według następującego schematu :

- 1) dla i -tej zmiennej fundamentalnej wyznaczamy wartość maksymalną: $fn_{max_i} = \max(fn_{ij})$ dla $j = 1, 2, \dots, N$,
- 2) dla i -tej zmiennej fundamentalnej wyznaczamy wartość minimalną: $fn_{min_i} = \min(fn_{ij})$ dla $j = 1, 2, \dots, N$,
- 3) dla j -tej spółki oraz i -tej zmiennej fundamentalnej obliczamy wartość zmiennej s_{ij} według następującego wzoru:

$$s_{ij} = \frac{fn_{ij} - fn_{min_i}}{fn_{max_i} - fn_{min_i}},$$

- 4) dla każdej j -tej spółki obliczamy wartość R_j jako, $R_j = \sum_{i=1}^m s_{ij}$ gdzie m oznacza liczbę zmiennych fundamentalnych,
- 5) porządkujemy spółki według malejącej wartości R_j (od najwyższej do najniższej),
- 6) wybieramy akcje spółek o K najwyższych wartościach R_j .

Istotnym elementem dobrze skonstruowanego portfela inwestycyjnego jest stopień jego zdywersyfikowania. Portfel dobrze zdywersyfikowany to m.in. portfel, którego składnikami są spółki z różnych sektorów. Możemy zatem powyższą procedurę zmodyfikować, wybierając najwyższych k_s wartości z każdego sektora, w taki sposób, aby

$$\sum_s k_s = K.$$

Jeśli przez P_s oznaczymy współczynnik kapitalizacji rynkowej sektora s względem całkowitej kapitalizacji rynkowej, co można zapisać wzorem:

$$P_s = \frac{\text{kapitalizacja rynkowa sektora } s}{\text{całkowita kapitalizacja rynkowa}},$$

to wartości k_s obliczane są jako iloczyn współczynnika P_s i liczby akcji K , w jaką inwestor zamierza inwestować.

Stosując przedstawioną powyżej metodę dla inwestycji wielookresowych, procedurę oceny spółek należy przeprowadzać na początku każdego okresu inwestycji.

Krok 3: alokacja kapitału za pomocą modelu Markowitza. Na początku każdego okresu inwestycyjnego t (rok, miesiąc, kwartał) po ustaleniu, które K spółek należy wybrać do portfela, za pomocą klasycznego modelu Markowitza wyznaczamy optymalną strategię inwestycyjną na dany okres.

Ponieważ z założenia, portfel powinien składać się z wszystkich K już wybranych spółek, do standardowego modelu zostało wprowadzone dodatkowe ograniczenie dotyczące minimalnego udziału każdej spółki w portfelu. Dodatkowo wprowadzono założenie, które pozwoli na ciągłość inwestycji przez cały okres – kapitał jaki inwestujemy w okresie t powinien być równy wartości portfela, jaką otrzymaliśmy na koniec okresu $t-1$. Wartość kapitału na koniec okresu t obliczamy następująco [Yu i in., 2009; Gluzicka, 2015]:

$$v_t = \mu_t x_t + v_{t-1},$$

gdzie:

μ_t – wektor stóp zwrotu spółek w okresie t , $\mu_t = [\mu_{t1}, \mu_{t2}, \dots, \mu_{tK}]$,

μ_{tj} – stopa zwrotu j -tej spółki w okresie t ,

x_t – wektor udziałów, $x_t = [x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tK}]$,

x_{tj} – udział j -tej spółki w portfelu, w okresie t .

Kapitał początkowy v_0 zazwyczaj przyjmowany jest na poziomie równym 1 (lub 100%).

Model, który można zastosować do wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej w okresie t jest następującej postaci (model 1):

$$\sigma_p \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_{tj} x_{tj} \geq \mu_{t0}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{tj} = v_{t-1}$$

$$x_{tj} \geq x_{t0} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

σ_p – odchylenie standardowe portfela,

μ_{tj} – stopa zwrotu j -tej spółki w okresie t ,

μ_{t0} – założony poziom stopy zwrotu portfela w okresie t ,

x_{tj} – udział j -tej spółki w portfelu w okresie t ,

x_{t0} – minimalny założony poziom udziałów w okresie t ,

v_t – kapitał inwestowany w okresie t .

O ile analiza wskaźników w kroku 2 przeprowadzana jest dla danych dotyczących danego okresu, to sama strategia dla okresu t wyznaczana jest na podstawie stóp zwrotu z wszystkich okresów do okresu $t-1$ włącznie.

Jak wykazały badania przeprowadzone przez autorów modelu, metoda ta pozwala na wyznaczenie optymalnych strategii inwestycyjnych, które dają lepsze stopy zwrotu niż zastosowanie strategii naiwnej czy też wykorzystanie modelu Sharpe'a do konstrukcji portfeli optymalnych. Badania przeprowadzone dla danych dotyczących funduszy inwestycyjnych pozwoliły na uzyskanie portfeli o wyższych stopach zwrotu niż portfel rynkowy czy portfel złożony z pięciu najlepszych funduszy [Dani i in., 2012; Paudel i Koirala, 2006].

2. Zastosowanie podejścia min-max do wielookresowych inwestycji na GPW w Warszawie

W dalszej części przedstawiono przykład zastosowania modelu 1 do wyznaczenia inwestycji wielookresowych dla danych dotyczących wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Celem badania było porównanie portfeli wyznaczanych za pomocą omawianego podejścia, pod względem ryzyka i zyskowności w zależności od liczby spółek w portfelu. Przeprowadzono również analizę porównawczą dla portfeli wyznaczanych za pomocą podejścia min-max oraz dla portfeli, których skład dobierany był na podstawie średnich stóp zwrotu w danym okresie (model 2).

Portfele wyznaczone były na podstawie danych dotyczących 50 spółek, wybranych w sposób losowy spośród wszystkich notowanych na GPW w Warszawie. Założono, że alokacja kapitału odbywała się na początku każdego kwartału w okresie lipiec 2010 – czerwiec 2013. Wybór strategii inwestycyjnej odbywał się na podstawie dziennych stóp zwrotu podzielonych na poszczególne kwartały. Do selekcji spółek w podejściu min-max wykorzystano dane dotyczące 15 następujących wskaźników finansowych:

- cena/zysk,
- cena/wartość księgowa,
- zysk na akcję,
- marża netto,
- wskaźnik ROA,
- wskaźnik ROE,
- wartość sprzedaży na akcję,
- wartość księgowa na akcję,
- wskaźnik retencji,

- trwała stopa wzrostu,
- wskaźnik płynności bieżącej,
- wskaźnik zadłużenia długoterminowego,
- wskaźnik dźwigni finansowej,
- marża operacyjna.

W analizie posłużono się wskaźnikami najczęściej stosowanymi w tego typu badaniach. Pierwszy portfel został wyznaczony na podstawie danych pochodzących z drugiego kwartału 2010 r. Ostatni zbiór spółek wyznaczony został na podstawie wartości wskaźników ekonomicznych, jakie odnotowano dla analizowanych spółek w 1 kwartale 2013 r.

Tabela 1. Uporządkowanie 30 spółek według malejącej wartości R_i w wybranych kwartałach

Numer spółki	Q3 2010	Q1 2011	Q1 2012	Q1 2013
1	WAWEL	WAWEL	EMPERIA	WAWEL
2	MCI	KGHM	WAWEL	PGE
3	ASTARTA	MCI	KGHM	TVN
4	KGHM	ASTARTA	BZWBK	BUDIMEX
5	LOTOS	LOTOS	TVN	EUROCASH
6	EMPERIA	PKNORLEN	LOTOS	MCI
7	BUDIMEX	BZWBK	PKNORLEN	ECHO
8	BZWBK	INTERCARS	INTEGERPL	INTEGERPL
9	PKNORLEN	INTEGERPL	ASTARTA	KGHM
10	ELBUDOWA	BUDIMEX	INTERCARS	FAMUR
11	FARMACOL	FARMACOL	EUROCASH	MAGELLAN
12	INTERCARS	CYFRPLSAT	BUDIMEX	APATOR
13	KETY	SYNTHOS	AMICA	BZWBK
14	CYFRPLSAT	ELBUDOWA	KETY	CCC
15	INTEGERPL	KETY	GETINOBLE	HANDLOWY
16	BOGDANKA	EUROCASH	MCI	ACTION
17	AMICA	CCC	ELBUDOWA	GETIN
18	EUROCASH	GETINOBLE	MAGELLAN	INTERCARS
19	TVN	BOGDANKA	SYNTHOS	ASTARTA
20	GETINOBLE	AMICA	BOGDANKA	CYFRPLSAT
21	CCC	TVN	POLICE	GETINOBLE
22	MAGELLAN	CIECH	GETIN	MILLENIU
23	POLNORD	MAGELLAN	ACTION	SANOK
24	MILLENIU	HAWE	FARMACOL	FARMACOL
25	GETIN	ECHO	HAWE	AMICA
26	SYNTHOS	GETIN	CCC	KETY
27	ORBIS	MILLENIU	BANKBPH	FORTE
28	APATOR	ASSECOPOL	CYFRPLSAT	SYNTHOS
29	ASSECOPOL	GTC	HANDLOWY	ELBUDOWA
30	ECHO	APATOR	APATOR	PKNORLEN

W tab. 1 przedstawiono zestawienie 30 pierwszych spółek dla wybranych kwartałów uporządkowanych na podstawie przeprowadzonej analizy wskaźników finansowych. Zestawienie to pokazuje, że w poszczególnych okresach zbiory potencjalnych składników wykorzystanych do wyznaczania optymalnych portfeli o ustalonej liczbie spółek (portfele składające się np. z 10 czy 15 spółek) mogły się znacząco różnić.

Tabela 2. Uporządkowanie 30 spółek według malejącej wartości średniej stopy zwrotu w wybranych kwartałach

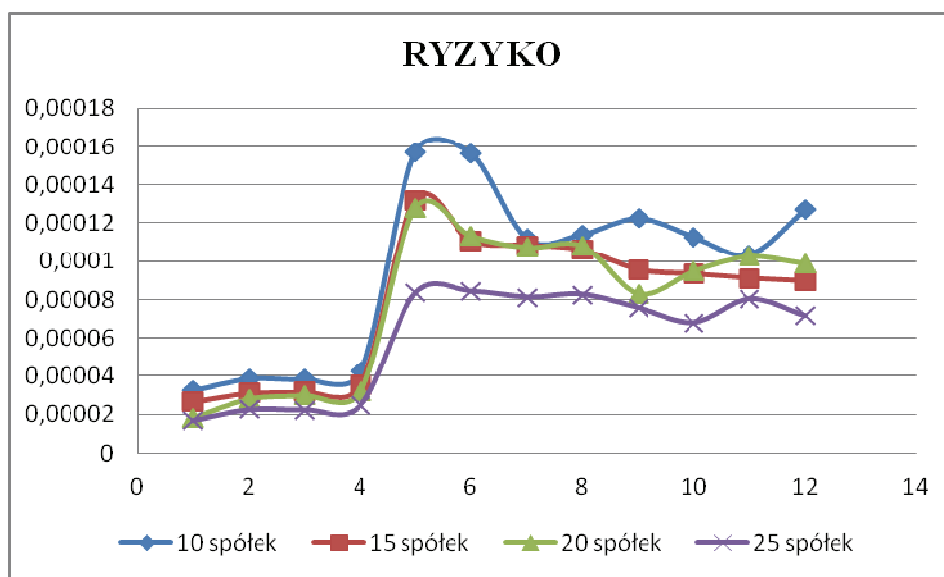
Numer spółki	Q3_2010	Q1_2011	Q1_2012	Q1_2013
1	BORYSZEW	POLICE	ACTION	ACTION
2	AMICA	FAMUR	AMICA	AMICA
3	HAWEL	GETINOBLE	POLICE	POLICE
4	KGHM	SYNTHOS	FORTE	FORTE
5	FAMUR	GETIN	INTERCARS	INTERCARS
6	ASTARTA	LOTOS	SANOK	SANOK
7	HANDLOWY	CIECH	EUROCASH	EUROCASH
8	SYNTHOS	MILLENIUM	ELBUDOWA	ELBUDOWA
9	POLICE	EUROCASH	SYNTHOS	SYNTHOS
10	SANOK	BOGDANKA	ECHO	ECHO
11	WAWEL	PKNORLEN	MAGELLAN	MAGELLAN
12	AGORA	IMPEXMET	VISTULA	VISTULA
13	POLNORD	KOPEX	ASTARTA	ASTARTA
14	TAURON	INTERCARS	PGNIG	PGNIG
15	ECHO	HANDLOWY	MILLENIUM	MILLENIUM
16	ENEA	WAWEL	BZWBK	BZWBK
17	EUROCASH	EMPERIA	BUDIMEX	BUDIMEX
18	NETIA	BORYSZEW	MCI	MCI
19	MCI	ACTION	PKNORLEN	PKNORLEN
20	MILLENIUM	BZWBK	BANKBPH	BANKBPH
21	ORBIS	AMICA	FAMUR	FAMUR
22	PGNIG	BANKBPH	CIECH	CIECH
23	PGE	PGNIG	KETY	KETY
24	BZWBK	MAGELLAN	CYFRPLSA	CYFRPLSA
25	BANKBPH	TVN	CCC	CCC
26	ELBUDOWA	KGHM	WAWEL	WAWEL
27	EMPERIA	INTEGERPL	EMPERIA	EMPERIA
28	GETIN	APATOR	NETIA	NETIA
29	PKNORLEN	NETIA	GETINOBLE	GETINOBLE
30	CCC	ASSECOPOL	INTEGERPL	INTEGERPL

W tab. 2 natomiast zestawiono 30 spółek uporządkowanych według malejącej średniej stopy zwrotu w danym kwartale. Widać, że tutaj skład portfeli

w kolejnych kwartałach różnił się od składników dobieranych na podstawie analizy wskaźnikowej.

Po uporządkowaniu spółek według wskaźników oraz według stóp zwrotu, kolejnym etapem analizy było wyznaczenie portfeli optymalnych. W portfelach przyjmowano założenie o liczbie spółek równej kolejno 10, 15, 20, 25, 30. Aby portfel składał się z określonej liczby składników, przyjęto, że udziały poszczególnych składników portfela muszą być na określonym minimalnym poziomie. Przyjęto założenie, że minimalny udział w portfelu przez cały okres inwestycyjny będzie taki sam. Jako możliwy poziom minimalnego udziału (x_{i0}) przyjmowano różne wartości m.in. 1%, 0,1%, 0,5%, 0,01%. Ponieważ dla wszystkich minimalnych udziałów otrzymano analogiczne wnioski, poniższe przedstawienie wyników ograniczono tylko dla udziałów na poziomie 0,1%. Wszystkie portfele wyznaczane były przy jednakowym założeniu dotyczącym zysku portfela – ograniczono się do portfeli nie przynoszących strat, a zatem poziom μ_0 przyjęto równy 0. Natomiast kapitał początkowy v_0 przyjęto na poziomie równym 1.

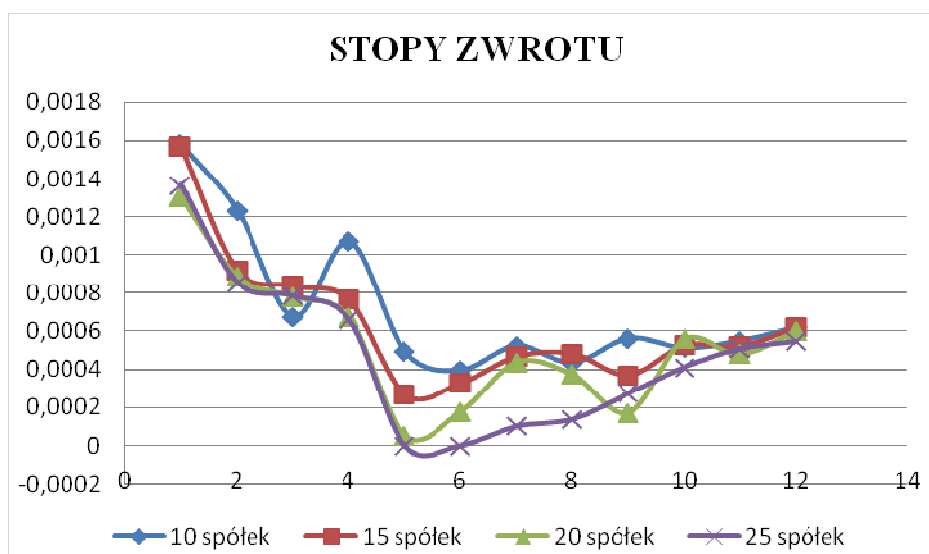
W pierwszej kolejności zostały porównane portfele o różnej liczbie spółek, wyznaczone tylko za pomocą podejścia min-max. Na rys. 1 przedstawione zostały wartości ryzyka portfeli wyznaczonych w kolejnych kwartałach, natomiast rys. 2 przedstawia wartości stóp zwrotu portfeli w poszczególnych kwartałach.



Rys. 1. Wartości ryzyka portfeli o różnej liczbie spółek w poszczególnych kwartałach wyznaczonych za pomocą modelu (1)

Na podstawie otrzymanych wyników, można stwierdzić, że im więcej spółek w portfelu tym mniejsze ryzyko i równocześnie najniższe wartości stóp zwro-

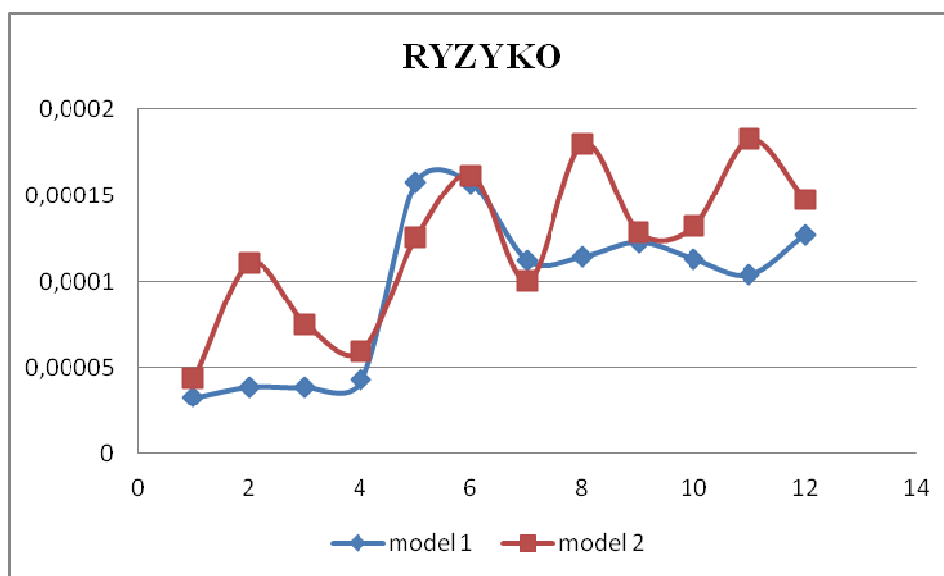
tu niemal przez cały okres inwestycyjny. Porównując wartości otrzymane na koniec okresu inwestycyjnego, widać wyraźnie, że należało inwestować w portfel o dużej liczbie spółek – wtedy ryzyko było najniższe. Pod względem końcowych stóp zwrotu natomiast, nie ma zasadniczo znaczenia, w ile spółek zainwestowano, gdyż dla każdego portfela otrzymano zbliżoną wartość stopy zwrotu. Większe różnice odnotowano dla początkowych okresów – analiza wskazuje, że w początkowych okresach lepiej było inwestować w portfele złożone z 10 spółek. Dla tego portfela niemal przez cały okres inwestycyjny otrzymano najwyższe stopy zwrotu.



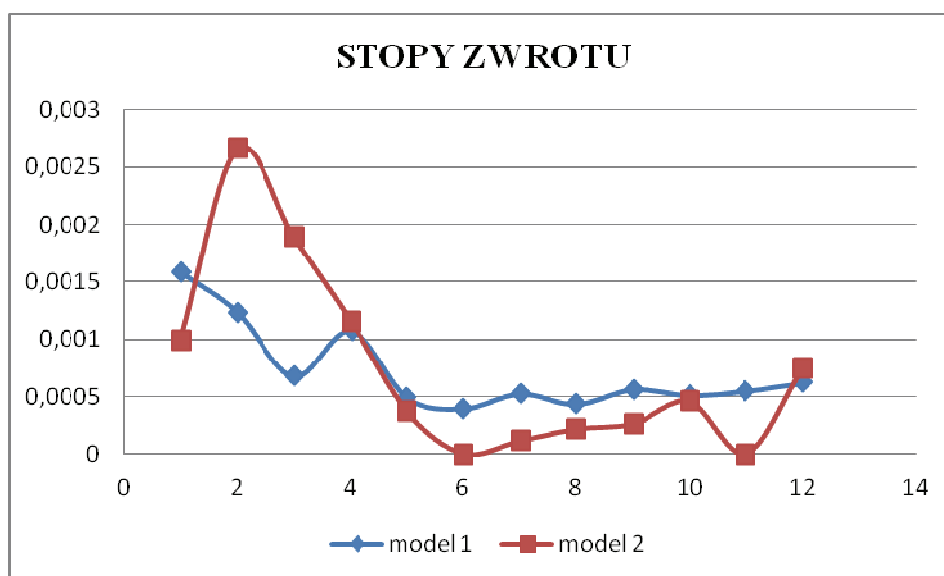
Rys. 2. Wartości stóp zwrotu portfeli o różnej liczbie spółek w poszczególnych kwartałach wyznaczonych za pomocą modelu (1)

W dalszej kolejności dokonano porównania portfeli, do których spółki wybierane były na podstawie wskaźników finansowych, z portfelami o spółkach dobieranych według średniej stopy zwrotu.

Portfele składające się z 10 lub 15 spółek dobieranych za pomocą analizy wskaźnikowej przez większość okresów, w tym również na koniec inwestycji, charakteryzowały się niższym ryzykiem niż odpowiadające im portfele, których skład dobierany był według stóp zwrotu. Portfele konstruowane za pomocą modelu 1 od pewnego momentu (5 podokres) charakteryzowały się również wyższymi zyskami, jednak metoda doboru spółek nie wpływa zasadniczo na wynik końcowy. W obu przypadkach otrzymywano podobne wartości. Na rys. 3 przedstawiono wartości ryzyka dla portfeli konstruowanych za pomocą obu modeli, natomiast na rys. 4 przedstawiono stopy zwrotu tych portfeli.



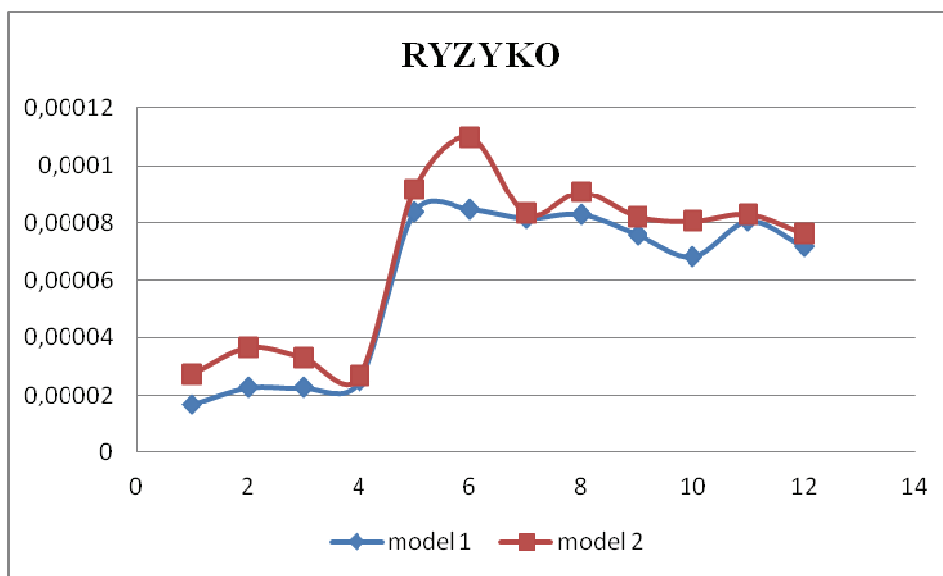
Rys. 3. Wartości ryzyka portfeli złożonych z 10 spółek wyznaczonych za pomocą modeli 1 i 2



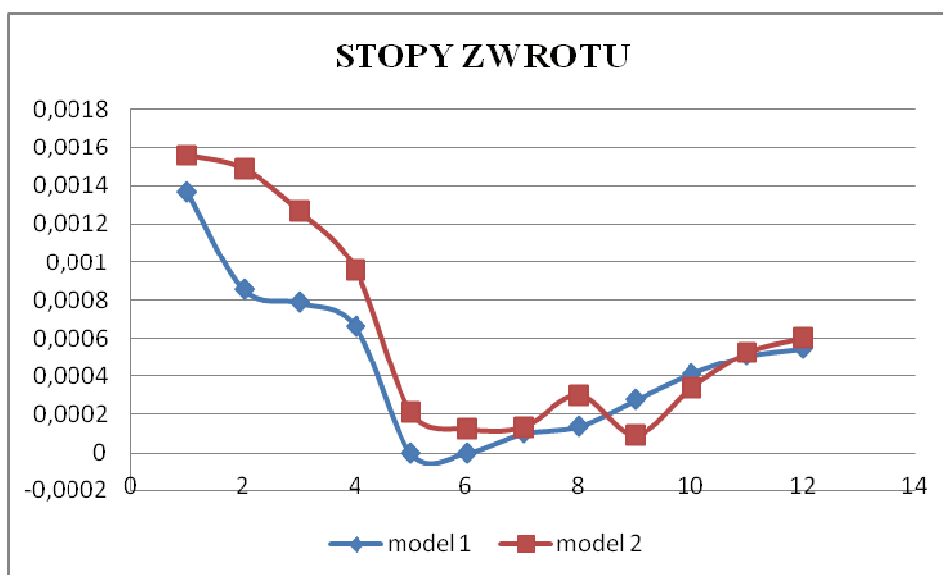
Rys. 4. Wartości stóp zwrotu portfeli złożonych z 10 spółek wyznaczonych za pomocą modeli 1 i 2

Portfel złożony z 25-30 składników wyznaczony za pomocą modelu 1 przez cały okres inwestycyjny był portfelem mniej ryzykownym. Pod względem stóp zwrotu był gorszym rozwiązaniem niż portfele wyznaczane za pomocą modelu 2. Portfele konstruowane ze spółek dobieranych według stóp zwrotu przez cały okres inwestycyjny miały wyższe stopy zwrotu niż portfele wyznaczane za po-

mocą modelu 1. Portfele wyznaczone w ostatnim kwartale charakteryzowały się stopami zwrot na zbliżonym poziomie. Na rys. 5 i 6 przedstawiono wartości ryzyka portfeli skonstruowanych w kolejnych kwartałach za pomocą obu modeli.



Rys. 5. Wartości ryzyka portfeli złożonych z 25 spółek wyznaczonych za pomocą modeli 1 i 2



Rys. 6. Wartości stóp zwrotu portfeli złożonych z 25 spółek wyznaczonych za pomocą modeli 1 i 2

W wyniku stosowania różnych metod do selekcji spółek, portfele o tej samej liczbie spółek różniły się składem. Dla lepszej oceny, która z inwestycji okazała się korzystniejsza dla inwestora dla każdego portfela z ostatniego analizowanego kwartału obliczono wartości tych portfeli. Wartość portfela oszacowano jako iloczyn udziałów danej spółki i wartości notowań w ostatnim dniu inwestycji. Zestawienie danych przedstawiono w tab. 3.

Tabela 3. Wartość portfela na koniec inwestycji

Liczba składników w portfelu	Model 1	Model 2
10	232,60	55,70
15	224,41	40,43
20	184,39	34,03
25	175,11	91,70

Otrzymane wyniki wskazują, że metoda doboru spółek na podstawie analizy wskaźników daje lepsze rezultaty, niż dobór spółek tylko na podstawie stóp zwrotu. Dla każdej liczby składników, inwestycja wyznaczona za pomocą modelu 1 była więcej warta niż inwestycja wyznaczona na podstawie drugiego podejścia. Najlepszą strategią inwestycyjną okazała się inwestycja w 10 spółek, wyznaczonych za pomocą podejścia min-max. Dla tego portfela otrzymano najwyższą wartość inwestycji na koniec okresu.

Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń empirycznych możemy wnioskować, że zastosowanie analizy zmiennych fundamentalnych do wyboru spółek jest dobrym sposobem do wyznaczania strategii inwestycyjnych, głównie dla portfeli złożonych z małej liczby spółek. Wówczas otrzymujemy inwestycje o niższym poziomie ryzyka i wyższej stopie zwrotu, niż w przypadku portfeli, których skład dobierany jest na podstawie stóp zwrotu. Co więcej, portfele złożone z małej liczby spółek (10-15 spółek) przynoszą wyższe zyski niż portfele konstruowane w ten sam sposób, ale składające się z 25-30 spółek. Dobór spółek do portfela na podstawie analizy wskaźników pozwala na uzyskanie wyższej wartości końcowej portfela. W tym kontekście zdecydowanie najlepszą okazała się strategia inwestowania w 10 spółek. Portfel o najmniejszej liczbie składników, wyznaczony za pomocą analizy wskaźników, okazał się portfelem najdroższym.

Wnioski otrzymane na podstawie przeprowadzonych badań sugerują, że stosowanie podejścia min-max do konstrukcji portfeli inwestycyjnych pozwala osiągnąć lepsze rezultaty niż stosowanie tradycyjnego podejścia Markowitza. W dal-

szej kolejności planuje się przeprowadzenie szerszych badań dotyczących tego podejścia. W szczególności planowane jest przeprowadzenie analiz dotyczących zarówno liczby spółek jak i wskaźników, które należy uwzględnić przy tego typu podejściu. W badaniach przyjmowane będą także różne podokresy, w których należy dokonać ponownej alokacji kapitału. Analizowane będą również pewne modyfikacje modelu 1 polegające m.in. na uwzględnieniu kosztów transakcyjnych, a także przypadek inwestycji bez krótkiej sprzedaży. Dla ustalenia własności charakterystycznych dla portfeli konstruowanych za pomocą podejścia min-max, planowane są badania dla danych pochodzących z różnych okresów czasowych.

Literatura

- Dani A.R., Ali N., Simhardi S., Murthy D., *Portfolio selection using min-max approach*, „Vikalpa” 2012, Vol. 37, No. 2, s. 61-71.
- DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R., *Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?* “Review of Financial Studies” 2009, Vol. 22(5), s. 1915-1953.
- Dhatt M.S., Kim Y.H., Mukherji S., *Relations between stocks returns and fundamental variables: Evidence from a segmented market*, “Asia-Pacific Financial Markets” 1999, Vol. 6(3), s. 221-233.
- Evans J., Archer S., *Diversification and the reduction of dispersion. An empirical analysis*. “Journal of Finance” 1968, Vol. 23(5), s. 761-767.
- Gluzicka A. (2015), *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania wielookresowych portfeli inwestycyjnych* [w:] *Badania operacyjne. Przykłady zastosowań*, red. J.B. Czaja, R. Jadcak, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s. 57-67.
- Goetzmann W.N., Kumar A., *Equity portfolio diversification*, NBER Series Working Paper, <http://ssrn.com/abstract=627321>.
- Paudel R.B., Koirala S. (2006), *Application of Markowitz and Sharpe models in Nepalese stock market*, „The Journal of Nepalese Business Studies” 2006, Vol. 3(1), s. 19-35.
- Tang G.Y.N., *How efficient is naive diversification?* “The International Journal of Management Science” 2004, Vol. 32, s. 155-160.
- Tarczyński W., Łuniewska M. (2004), *Dywersyfikacja ryzyka na polskim rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Placet, Warszawa.
- Yu M., Inoue H., Takahashi S., Shi J. (2009), *Dynamic portfolio selection with uncertainty*, „International Journal of Uncertainty”, Vol. 17, No. 2.

APPLICATION OF THE MIN-MAX APPROACH TO SELECTION THE MULTIPERIOD INVESTMENT PORTFOLIO

Summary: Every investor must make decision which of stocks he should choose to portfolio to received maximum return and minimum risk in the future. The next problem is how many stocks should find out in his investment portfolio. In classical approach to construction the optimal investment portfolio, stocks usually are selected on the base of the data concerning exchange quotations. However, many different factors affect on the rate of return of given index. All these factors are changing during the investment period. So it is important to make changes in portfolio during the investment.

In this paper the dynamic method to construction the optimal investment portfolio will be presented. In presented approach, stocks will be selected by application the min-max rule to selected indicators characterizing given index. The model of selection of investment portfolio will be applied to data from the Warsaw Stock Exchange.

Keywords: multiperiod investment port folio, investment risk, min-max approach.