▶ KNUV 2017; 3(53): 117-129

Leszek Zaremba
Akademia Finansów i Biznesu Vistula - Warszawa

INŻYNIERIA FINANSOWA NA RYNKACH NIEZUPEŁNYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono teorię dającą narzędzia pozwalające każdej firmie zabezpieczyć się przed ryzykiem spadku jej kursu giełdowego. Rozpoczęto od prezentacji nieznanego w literaturze polskojęzycznej matematycznego modelu rynku finansowego w postaci macierzy, w której każda kolumna reprezentuje wypłaty z jakiegoś konkretnego instrumentu finansowego dostępnego na tym rynku. Pokazano, w jaki sposób inżynier finansowy, pracujący w analizowanym przedsiębiorstwie ABC lub w banku, może zabezpieczyć tę firmę przed ryzykiem spadku jej kursu giełdowego przez zbudowanie najlepszej z możliwych replik „wymarzonego" przez ABC papieru wartościowego rekompensującego w całości potencjalne spadki kursu. Podano stosowne wzory i zilustrowano je przykładami.

Słowa kluczowe: błąd replikacyjny, najlepszy aproksymacyjny *hedging*, oczekiwana suma kwadratów błędów_replikacyjnych, portfel replikujący, rynek niezupełny.

Kody JEL: C02, C18, C54, C60

Wstęp

Rozpatrujemy rynek finansowy w ujęciu statycznym, to znaczy zakładamy, że cała aktywność gospodarcza (praca, konsumpcja, handel) ma miejsce „dziś", np. o godz. 9:00 rano oraz „jutro" też o 9:00 rano (Cerny 2009). Taki model gospodarki, choć uproszczony, jest w znacznym stopniu adekwatny zarówno dla firm zarządzających ryzykiem spadku nich kursu giełdowego lub spadku przychodów ze sprzedaży, jak również dla funduszy inwestycyjnych, które nie dokonują wielokrotnych transakcji każdego dnia, lecz od czasu do czasu, na przykład, raz na tydzień, raz na miesiąc, raz na kwartał itp., czyli mówiąc obrazowo o godz. 9:00 rano dziś, a następnie o godz. 9:00 rano następnego dnia.

Przyjmujemy, że na rozpatrywanym rynku finansowym dostępnych jest $\boldsymbol{n}$ płynnych papierów wartościowych, zaś liczba wszystkich możliwych stanów tego rynku typu hossa, bessa, itp. wynosi $\boldsymbol{m}$. W celu lepszego zobrazowania istoty inżynierii finansowej ograniczymy nasze rozważania do kilku (3-5) jego stanów (scenariuszy) oraz do kilku (3-5) płynnych papierów wartościowych.

Na przykład, macierz

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 100 & 0 & 4 \\ 8 & 100 & 2 & 1 \\ 5 & 100 & 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

przedstawia rynek finansowy, na którym są dostępne 4 rodzaje papierów wartościowych reprezentowanych przez 4 kolumny. Wiersze natomiast obrazują 3 możliwe stany na tym rynku. Łatwo sobie wyobrazić, że kolumna 1 może reprezentować akcje spółki ABC, które w stanie hossy warte są 11 zł każda, w stanie równowagi 8 zł, zaś w czasie bessy tylko 5 zł.

Kolumna 2. reprezentuje bon skarbowy, który jest bez ryzyka, ponieważ płaci niezależnie od okoliczności 100 zł. Natomiast kolumna 3. przedstawia opcję sprzedaży 1 akcji firmy ABC po 10 zł. Z kolei ostatnia kolumna jest zapisem wypłat z opcji kupna 1 akcji ABC po 7 zł.

Sformułowanie problemu zabezpieczenia się przed spadkiem wartości spółki

Jednym z modeli rynku finansowego w Polsce z punkty widzenia KGHM może być macierz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 & 0 \\ 100 & 100 & 10 & 0 \\ 80 & 100 & 0 & 10 \\ 60 & 100 & 0 & 30 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Jej 1. kolumna, jak się już domyślamy, reprezentuje wypłaty z 1 akcji KGHM, kolumna 2. przedstawia wypłaty z bonu skarbowego, kolumna 3. jest zapisem wypłat z opcji kupna 1 akcji KGHM po 90 zł, zaś kolumna 4. przedstawia wypłaty z opcji sprzedaży 1 akcji KGHM po 90 zł.

Załóżmy, iż jest sierpień 2015 roku i cena 1 akcji KGHM wynosi 120 zł. Jak wiemy, wartość kursu 1 akcji KGHM spadła od tego momentu ze 120 zł do 60 zł w styczniu 2016 roku i pozostawała na tym poziomie do maja 2016 roku.

Gdyby KGHM posiadał instrument finansowy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$ wtedy wszystkie spadki kursu akcji KGHM byłyby w 100% zrekompensowane do poziomu 120 PLN. Ponieważ instrument **b** nie jest z reguły dostępny na rynku finansowym, problem jaki sobie stawiamy brzmi:

Problem 1. Zbudować taki instrument finansowy (papier wartościowy) **f**, który w najlepszy sposób odtworzy, czyli zreplikuje instrument **b**, przy czym koszt tej repliki będzie bliski zera.

Trochę teorii

Kolumny występujące w macierzy określającej rynek finansowy nazywamy bazowymi papierami wartościowymi, które z definicji są łatwo dostępne (płynne) na rynku finansowym. Można z nich w naturalny sposób tworzyć tzw. zbyteczne papiery wartościowe, zbyteczne w tym sensie, że nie wnoszą one nic nowego do tego rynku, dając się w 100% wygenerować (wytworzyć) z bazowych papierów wartościowych. Przykładem takiego zbytecznego papieru wartościowego jest instrument o wypłatach danych przez wektor

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 260 \\ 210 \\ 190 \\ 190 \end{bmatrix} \tag{3}$$

który w 1. stanie rynku wypłaca 260 zł, w 2. stanie rynku wypłaca 210 zł, zaś 190 zł zarówno w 3., jak i 4. stanie rynku. Aby go wygenerować (wytworzyć) na rynku danym przez macierz **P**, wystarczy dokonać zakupu 1 akcji firmy KGHM, 1 bonu, 1 opcji kupna akcji KGHM po 90 zł oraz 1 opcji sprzedaży akcji KGHM po 90 zł. Matematycznie zapisujemy to w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} 125 \\ 100 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 & 0 \\ 100 & 100 & 10 & 0 \\ 80 & 100 & 0 & 10 \\ 60 & 100 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e} =. \begin{bmatrix} 260 \\ 210 \\ 190 \\ 190 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Definicja 1. Rynek, na którym nie każdy papier wartościowy da się bezbłędnie zreplikować nazywamy rynkiem niezupełnym.

Bardzo rzadko zdarza się w praktyce aby rynek finansowy był zupełny. Widać to już wyraźnie w przypadku rynku $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ w którym każdy z 3 wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ reprezentujących tak zwane instrumenty finansowe

Arrowa-Debreu (zob. Cerny, 2009), nie da się zreplikować (odtworzyć) z bazowych instrumentów (kolumn macierzy C) ponieważ wyznaczniki 3 poniższych macierzy

$$F_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

są różne od zera (det (F_1) = 1, det (F_1) = –2, det (F_3) = 1), co implikuje iż trzecie kolumny tych 3 macierzy są liniowo niezależne od 2. pierwszych kolumn.

Definicja 2. Niech R^m oznacza zbiór (przestrzeń) wszystkich wektorów o m współrzędnych.

Bazą przestrzeni R^m nazwiemy dowolny maksymalny (w sensie ilości) układ wektorów liniowo niezależnych.

Wniosek 1. Jeżeli z wektorów-kolumn reprezentujących bazowe papiery wartościowe na jakimś rynku finansowym **F** nie da się wyodrębnić bazy przestrzeni R^m (liniowo niezależnych kolumn jest mniej niż m), to **F** jest rynkiem niezupełnym i na odwrót, jeśli **F** jest rynkiem niezupełnym, to wśród wektorów-kolumn reprezentujących płynne papiery wartościowe na rynku finansowym **F** jest mniej niż m liniowo niezależnych wektorów w przestrzeni R^m.

Zasady *hedgingu* na rynkach niezupełnych

Ponieważ wyznacznik macierzy P wynosi 0, to wśród kolumn P nie ma 4 liniowo niezależnych wektorów w R^4, a więc na mocy wniosku 1, rynek reprezentowany przez P jest niezupełny. Na rynkach niezupełnych replikę każdego pożądanego przez firmę instrumentu **a** robi się za pomocą najlepszego aproksymacyjnego *hedgingu*, to znaczy poszukuje się takiego portfela $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ składającego się z bazowych (dostępnych na rynku) papierów wartościowych (w przypadku macierzy P są to 4 kolumny) który odtwarza $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ w „najlepszy możliwy sposób" polegający na minimalizacji błędu replikacyjnego. Błędem tym jest wektor różnic $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m)$ = Ax-**a** między współrzędnymi nie do końca udanej repliki Ax a współrzędnymi instrumentu finansowego **a**, który staramy się jak najlepiej odtworzyć. Minimalizacja błędu replikacyjnego polega na minimalizowaniu sumy kwadratów błędów „po współrzędnych" („sum of squared replication errors"), w skrócie SSRE, według wzoru:

$$\mathrm{SSRE} = \varepsilon_1^{\,2} + \varepsilon_2^{\,2} + \ldots + \varepsilon_m^{\,2} = \left[(Ax)_1 - a_1\right]^2 + \left[(Ax)_2 - a_2\right]^2 + \ldots + \left[(Ax)_m - a_m\right]^2, \quad (6)$$

gdzie $(\mathrm{Ax})^{\mathrm{i}}$ oznacza „i"-tą współrzędną wektora Ax, zaś a_i jest "i"-tą współrzędną wektora **a** (Zaremba 2015, s. 101-115).

Firma może sama zreplikować sobie instrument **a**, jeśli potrafi (zatrudnia inżynierów finansowych) lub zwrócić się do instytucji finansowej (np. banku) celem zakupu papieru wartościowego **a**, którego replikę powinien wtedy utworzyć sobie ten bank jako zabezpieczenie wypłat należnych firmie, która zapłaciła bankowi za instrument **a**. Główny ciężar rozwiązania tego problemu spoczywa na znanym (Cerny 2009) wzorze (7).

Twierdzenie 1. Niech jakakolwiek macierz C rozmiaru m × k ($k < m$) , zawierająca tylko liniowo niezależne kolumny, reprezentuje pewien niezupełny rynek finansowy, zaś **a** jest jakimkolwiek instrumentem finansowym, który chcemy replikować czyli odtworzyć. Wówczas portfel **x** minimalizujący SSRE, a więc zapewniający najlepszą osłonę instrumentu **a** dany jest wzorem:

$$\hat{x} = (C^T C)^{-1} C^T a\,. \quad (7)$$

Taki portfel generuje wypłaty we wszystkich m stanach rynku dane wektorem

$$\mathrm{C}\,\hat{x} = C(C^T C)^{-1} C^T a\,. \quad (8)$$

Wyznaczenie najlepszej repliki dla KGHM

Aby móc zastosować twierdzenie 1 do badanego przez nas rynku P danego wzorem (2) oraz do wektora $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$, musimy usunąć minimalną liczbę kolumn D tak, aby pozostałe kolumny były już liniowo niezależne. Z reguły można to zrobić na kilka sposobów, tymczasem my pozbędziemy się 4. kolumny, pozostawiając do dalszej analizy macierz

$$\mathrm{P}^* = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 \\ 100 & 100 & 10 \\ 80 & 100 & 0 \\ 60 & 100 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Stosując wzór (7) otrzymamy

$$[(P^*)^T P^*]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}00284 & -0{,}0021 & -0{,}0044 \\ -0{,}00209 & 0{,}00159 & 0{,}00311 \\ -0{,}00439 & 0{,}00311 & 0{,}00803 \end{bmatrix}; \quad (P^*)^T b = \begin{bmatrix} 8175 \\ 11500 \\ 25 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

W konsekwencji najlepszym portfelem replikującym nasz instrument **b** jest portfel $\hat{x} = [(P^*)^T P^*]^{-1} \cdot (P^*)^T b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$, co oznacza, iż tak bardzo korzystny dla KGHM instrument **b** dał się bezbłędnie zreplikować! Znaleziony przez nas portfel $\hat{x}$ oznacza, iż należy krótko sprzedać 1 akcję firmy KGHM oraz kupić 1,2 bonu skarbowego aby bezbłędnie odtworzyć $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$. Wypłaty z portfela $\hat{x}$ który replikuje pożądany przez KGHM instrument **b** oblicza się według wzoru

$$\mathrm{P}^* \hat{x} = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 \\ 100 & 100 & 10 \\ 80 & 100 & 0 \\ 60 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}.$$ Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie 2. Jeśli modelem polskiego rynku finansowego jest macierz P dana wzorem (2), lub równoważnie (9), zaś KGHM lub wybrany przez KGHM bank dokonuje repliki instrumentu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$ to bezbłędną repliką jest portfel $\hat{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$, który zapewnia wymarzone przez KGHM wypłaty. Zgodnie z wzorem (6), błąd replikacyjny wynosi zero.

Uwaga 1. Błąd nie wyniósłby 0 gdyby replikowany instrument był liniowo niezależny od kolumn macierzy P. Na przykład, gdybyśmy replikowali instrument $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 40 \\ 59 \end{bmatrix}$, to $[(P^*)^T P^*]^{-1}$ byłby dany tym samym wzorem (10) co poprzednio, natomiast $(P^*)^T d = \begin{bmatrix} 8140 \\ 11400 \\ 50 \end{bmatrix}$. W rezultacie tego $\hat{x} = [(P^*)^T P^*]^{-1} \cdot (P^*)^T d = \begin{bmatrix} -0{,}9998 \\ 1{,}1924 \\ 0{,}0439 \end{bmatrix}$, zaś płatności wynikające z tego portfela byłyby prawie równe $\begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 40 \\ 59 \end{bmatrix}$, gdyż wynosiłyby

$$P^* \hat{x} = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 \\ 100 & 100 & 10 \\ 80 & 100 & 0 \\ 60 & 100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}9998 \\ 1{,}1924 \\ 0{,}0439 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}20 \\ 19{,}70 \\ 39{,}25 \\ 59{,}25 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Koszty *hedgingu*

Odrębnym, choć ważnym pytaniem jest, jak obliczyć koszt *hedgingu*. Mając na uwadze, że macierz $P^* = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 35 \\ 100 & 100 & 10 \\ 80 & 100 & 0 \\ 60 & 100 & 0 \end{bmatrix}$ reprezentuje polski rynek finansowy, przyjmijmy iż 1 akcja KGHM kosztuje dziś 120 zł (tak było w sierpniu 2015 roku), bon skarbowy wygasający za 6 miesięcy kosztuje dziś 98,50 zł, zaś instrument $\begin{bmatrix} 35 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, będący w istocie 6-miesięczną opcją kupna 1 akcji KGHM po 90 zł kosztuje 20 zł (nie może kosztować więcej niż 35 zł). Dużo bardziej dokładny sposób obliczenia kosztu tej opcji (premii) można obliczyć bezpośrednio ze wzoru Blacka-Scholesa, jednak, jak zobaczymy za chwilę, dokładna kwota nie będzie nam w tym przypadku potrzebna.

Koszty replik instrumentów b= $\begin{bmatrix} -5 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$, **d** = $\begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 40 \\ 59 \end{bmatrix}$

Najlepsza replika instrumentu **b**, czyli portfel $\hat{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix}$ bez względu na koszt opcji kosztuje (-1)120 zł + (1.2)98,5 zł + (0)20 zł = - 1,80 zł, czyli poniżej 0 zł. Natomiast replika instrumentu d, czyli portfel $\hat{x} = \begin{bmatrix} -0{,}9998 \\ 1{,}1924 \\ 0{,}0439 \end{bmatrix}$ kosztuje maksymalnie (przyjmując iż premia za opcję wynosi 35 zł)

$$(-0{,}9998)120 \text{ zł} + (1.1924)98{,}5 \text{ zł} + (0{,}0439)35 \text{ zł} = -\,0{,}99 \text{ zł}, \qquad (12)$$

czyli również poniżej 0 zł.

Wniosek 2. Z przeprowadzonych obliczeń wynika iż koszty hedgingu mogą być zerowe, a nawet ujemne!

Hedging na rynkach niezupełnych z uwzględnieniem prawdopodobieństw stanów rynku

Do tej pory zakładaliśmy milcząco, że prawdopodobieństwa wszystkich stanów rynku są jednakowe. Tak jednak z reguły nie jest, gdyż niektóre stany rynku są mało prawdopodobne, np. bardzo wielki spadek kursu , jak również bardzo wielki wzrost kursu wybranej do analizy akcji, indeksu giełdowego lub pary walutowej, takiej jak np. NZD/AUD (nowozelandzki dolar wyrażony w jednostkach dolara australijskiego).

Od tej pory przyjmijmy, iż p_i jest obiektywnym (znanym bankowi lub nie) prawdopodobieństwem wystąpienia stanu „i”(wiersza „i”), pamiętając, iż wiersze reprezentują poszczególne stany rynku ; oczywiście musi zachodzić nierówność $\sum_{i=1}^{i=m} p_i = 1$. Poszukując najlepszej repliki na rynku niezupełnym, będziemy minimalizować *oczekiwaną sumę kwadratów błędów replikacyjnych* („*expected sum of squared replication errors*") daną wzorem

$$\text{ESSRE} = p_1\varepsilon_1^{\ 2} + p_2\varepsilon_2^{\ 2} + \ldots + p_m\varepsilon_m^{\ 2} =$$
$$= p_1\left[(Ax)_1 - b_1\right]^2 + p_2\left[(Ax)_2 - b_2\right]^2 + \ldots + p_m\left[(Ax)_m - b_m\right]^2. \qquad (13)$$

Innymi słowy, jest to suma ważona kwadratów błędów replikacyjnych. Gdy rynek jest zupełny, to każdy instrument finansowy jest zbyteczny, a zatem dla każdego szczególnego instrumentu finansowego będziemy mieć SSRE = 0 =ESSRE. Ponadto, jeśli wszystkie prawdopodobieństwa są identyczne (sumujące się do 1), to ESSRE = (1/n)SSRE.

Twierdzenie 3 . Niech macierz C rozmiaru $m \times k$ reprezentuje niezupełny rynek finansowy, zaś **a** nie da się w pełni odtworzyć za pomocą k kolumn macierzy C, czyli nie jest zbytecznym instrumentem finansowym. Jeśli p_i jest prawdopodobieństwem wystąpienia stanu „i", to aby najlepiej osłonić swą ryzykowną pozycję, w którą bank wszedł wystawiając do sprzedaży klientowi instrument **a**, powinniśmy zbudować portfel $\hat{\hat{x}}$ (minimalizujący ESSRE) zgodnie ze wzorem:

$$\hat{\hat{x}} = (\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}\widetilde{C}^T\widetilde{a}, \qquad (14)$$

gdzie $\widetilde{C}$ jest macierzą, która powstaje z C przez pomnożenie każdego wiersza C przez $\sqrt{p_i}$, zaś $\widetilde{a}$ jest wektorem, który powstaje z **a** przez pomnożenie każdej współrzędnej **a** przez $\sqrt{p_i}$. Taki portfel generuje wypłaty we wszystkich m stanach rynku dane wektorem

$$C\hat{\hat{x}} = C(\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}\widetilde{C}^T\widetilde{a}, \qquad (15)$$

który w najlepszy możliwy sposób przybliża wypłaty z **a**.

Po rozwiązaniu przykładu 2 z różnymi prawdopodobieństwami stanów rynku, rozważymy w przykładzie 3 ten sam rynek finansowy przyjmując dla uproszczenia iż wszystkie 3 stany rynku są jednakowo prawdopodobne, aby wychwycić różnice w rozwiązaniach.

Przykład 2. Niech rynek finansowy dany będzie przez macierz $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, przy czym wypłata 3 zł z 1. bazowego papieru wartościowego pojawia się z prawdopodobieństwem ½, wypłata 2 zł pojawia się z prawdopodobieństwem 1/6 , zaś wypłata 1 zł z prawdopodobieństwem 1/3. Dla 1. instrumentu finansowego

Arrowa-Debreu reprezentowanego jak wiemy przez wektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, znajdziemy najlepszy aproksymacyjny *hedge*, czyli najlepszą osłonę i obliczymy oczekiwany błąd ESSRE tej osłony (hedgingu).

Rozwiązanie. Poszukujemy więc portfela $\hat{\hat{x}} = (\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}\widetilde{C}^T\widetilde{b}$, który minimalizuje ESSRE, czyli oczekiwaną sumę kwadratów błędów, dając wypłaty $C\hat{\hat{x}} = C(\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}\widetilde{C}^T\widetilde{b}$, które są najbliższe wypłatom instrumentu **b** w sensie minimalizacji ESSRE. W tym celu, obliczamy najpierw macierz $(\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}$, a następnie wektor $\widetilde{C}^T\widetilde{b}$, aby w kolejnym kroku pomnożyć $(\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}$ przez $\widetilde{C}^T\widetilde{b}$. Wykonując stosowne mnożenia otrzymujemy kolejno

$$(\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 3\sqrt{1/2} & 2\sqrt{1/6} & 1\sqrt{1/3} \\ 1\sqrt{1/2} & 1\sqrt{1/6} & 1\sqrt{1/3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{1/2} & 1\sqrt{1/2} \\ 2\sqrt{1/6} & 1\sqrt{1/6} \\ 1\sqrt{1/3} & 1\sqrt{1/3} \end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 13/6 \\ 13/6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}24 & -2{,}69 \\ -2{,}69 & 6{,}83 \end{bmatrix}$$

oraz $\widetilde{C}^T\widetilde{b} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{1/2} & 2\sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & \sqrt{1/3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, z czego wynika, iż

$$\hat{\hat{x}} = (\widetilde{C}^T\widetilde{C})^{-1}\widetilde{C}^T\widetilde{b} = \begin{bmatrix} 1{,}24 & -2{,}69 \\ -2{,}69 & 6{,}83 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}517 \\ -0{,}621 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

co, jak wiemy, oznacza kupno 0,517 akcji oraz krótką sprzedaż 0,621 bonu. Taki portfel da nam wypłaty

$$C\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}517 \\ -0{,}621 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}931 \\ 0{,}414 \\ -0{,}103 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

które są najbliższe wypłatom instrumentu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, biorąc pod uwagę prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów rynku. Widzimy, że najmniejsze odchylenie wypłaty z portfela $C\hat{x}$ od wypłat z instrumentu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ występuje w stanie 1. który jest najbardziej prawdopodobny, zaś największe odchylenie występuje w najmniej prawdopodobnym stanie 2-im. Błąd tego odchylenia jest bardzo mały, gdyż wynosi

$$\text{ESSRE} = p_1\varepsilon_1^{\ 2} + p_2\varepsilon_2^{\ 2} + \ldots + p_m\varepsilon_m^{\ 2} =$$
$$= 0{,}5\,(0{,}069)^2 + (1/6)(0{,}414)^2 + (1/3)(-0{,}103)^2 = 0{,}0345.$$

Przykład 3. Rozważmy ten sam rynek finansowy $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i ten sam instrument $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ z zamiarem znalezienia najlepszego aproksymacyjnego hedgingu (osłony) gdy dla uproszczenia przyjmujemy, iż prawdopodobieństwa znalezienia się rynku w każdym z 3 stanów są takie same.

Rozwiązanie. Wiemy już, że portfel $\hat{x} = (C^T C)^{-1} C^T b$ minimalizuje SSRE. Obliczając kolejno $(C^T C)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 7/3 \end{bmatrix}$

oraz $C^T b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, otrzymamy

$\hat{x} = (C^T C)^{-1} C^T b = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/3 \end{bmatrix}$, co oznacza, że wypłaty, które generuje taki portfel są dane wzorem

$$C\,\hat{x} = C(C^T C)^{-1} C^T b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

W najlepszy możliwy sposób odtwarzają/przybliżają one wypłaty ze szczególnego instrumentu finansowego $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Innymi słowy, stanowią najlepszą osłonę dla banku, który wystawia (sprzedaje) instrument finansowy **b** swemu klientowi w przypadku, gdy prawdopodobieństwa znalezienia się rynku w każdym z 3 stanów zostały dla uproszczenia uznane jako takie same.

Obliczmy na koniec błąd przybliżenia na 2 sposoby, najpierw według wzoru

$$SSRE = (5/6-1)^2 + (1/3-0)^2 + (-1/6-0)^2 = 1/6,$$

a następnie z uwzględnieniem prawdopodobieństw 1/3, 1/3, 1/3, otrzymamy

$$ESSRE = (1/3)(5/6-1)^2 + (1/3)(1/3-0)^2 + (1/3)(-1/6-0)^2 = 1/18 = 0{,}0556.$$

Porównując ten wynik z błędem 0,0345 wyliczonym w przykładzie poprzednim, widzimy że uwzględnienie prawdopodobieństw wyraźnie poprawia dokładność repliki. Możemy więc sformułować

Wniosek 2. Przyjęcie upraszczającego założenia iż wszystkie prawdopodobieństwa są sobie równe pogarsza precyzję repliki.

Bibliografia

Cerny A. (2009), *Mathematical Techniques In Finance*, Princeton University Press, Princeton.

Zaremba L. (2015), *Inżynieria finansowa na rynkach zupełnych*, „Kwartalnik Naukowy Uczelni Vistula", nr 4(46).

Financial engineering in incomplete markets

Summary

In his article, the author presented the theory which offers the tools enabling every company hedging itself against the risk of decline of its stock price. He started from the presentation of the unknown in the Polish-language literature mathematical model of the financial market in the form of a matrix whose each column features pay-offs from a specific financial instrument accessible in that market. He demonstrated how a financial engineer working at the analysed enterprise ABC or a bank can protect that company against the risk of a decline of its stock price by building the best possible replications of the "dreamed" by the ABC company security fully compensating the potential losses of the company. The author also provided suitable formulas and illustrated them with examples.

Key words: replication error, best approximate hedging, expected squared replication errors, replicating portfolio, incomplete (financial) market.

JEL codes: C02, C18, C54, C60

Artykuł nadesłany do redakcji we wrześniu 2017 roku.

Afiliacja:
dr Leszek Zaremba
Akademia Finansów i Biznesu Vistula
Wydział Biznesu i Stosunków Międzynarodowych
ul. Stokłosy 3
02-787 Warszawa
tel.: 22 457 23 00
e-mail: l.zaremba@vistula.edu.pl