A C T A U N I V E R S I T A T I S L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 294, 2013

Paweł Dykas[*], *Tomasz Tokarski*[**]

PODAŻOWE CZYNNIKI WZROSTU GOSPODARCZEGO – PODSTAWOWE MODELE TEORETYCZNE

Streszczenie. Celem prezentowanego opracowania jest analiza podażowych determinantów długookresowego wzrostu gospodarczego na gruncie podstawowych, teoretycznych modeli wzrostu. W pracy analizowane są neoklasyczne modele wzrostu, modele wzrostu oparte na teorii optymalnego sterowania Pontriagina oraz tzw. modele wzrostu semi-endogenicznego.

1. Wprowadzenie

Problematyka wzrostu gospodarczego, oparta na matematycznych modelach wzrostu gospodarczego, weszła do głównego nurtu makroekonomii na przełomie lat 30-tych i 40-tych XX wieku. Wtedy to zostały sformułowane modele wzrostu gospodarczego R.F. Harroda oraz E.D. Domara, które można zaliczyć do modeli makroekonomii keynesistowskiej. Po keynesistowskich modelach wzrostu pojawiły się modele neoklasyczne, do których zaliczyć można między innymi modele: Solowa, Phelpsa, Mankiwa-Romera-Weila oraz Nonnemana-Vanhoudta. W teorii wzrostu gospodarczego podejmowano również próby endogenizacji postępu technicznego, w wyniku czego powstały tzw. endogeniczne modele wzrostu gospodarczego do których zaliczyć można między innymi modele wzrostu: Ramseya, Lucasa oraz Romera.

W prezentowanym opracowaniu scharakteryzowano podstawowe modele wzrostu gospodarczego, tj. modele: Solowa, Mankiwa-Romera-Weila oraz Nonnemana-Vanhoudta (zaliczane do neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego), endogeniczne modele wzrostu (zwane inaczej modelami optymalnego sterowania): Lucasa, Romera oraz *N*-kapitałowy model optymalnego sterowania typu Nonnemana-Vanhoudta. Opracowanie kończy analiza tzw. modelu wzrostu semi-endogeniczego.

[*] Mgr, Katedra Ekonomii Matematycznej, Instytut Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Jagiellońskiego.

[**] Prof. dr hab., Katedra Ekonomii Matematycznej, Instytut Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Jagiellońskiego.

2. Neoklasyczna funkcja produkcji i reszty Solowa[1]

Prostą analizę podażowych determinantów długookresowego wzrostu gospodarczego oprzeć można na dobrze znanej w analizach makroekonomicznych koncepcji neoklasycznej funkcji produkcji. Przez neoklasyczną funkcję produkcji z reguły rozumie się funkcję $Y = F(K, L)$, gdzie $Y \geq 0$ to wielkość wytworzonego strumienia produktu, zaś K, $L \geq 0$ oznacza nakłady kapitału i pracy, charakteryzującą się następującymi właściwościami (za Barro, Sala-i-Martin [1995, s. 16–17], por. też np. Tokarski [2009b, rozdział 1], Tokarski [2011a, rozdział 4] lub Tokarski [2011b, rozdział 5])[2]:

I $F(K,0) = F(0,L) = 0$, co oznacza, że każdy z czynników produkcji jest niezbędny w procesie produkcyjnym.

II $\lim\limits_{K \to +\infty \wedge L>0} F(K,L) = \lim\limits_{L \to +\infty \wedge K>0} F(K,L) = +\infty$, skąd wynika, że bardzo dużym (dążącym do $+\infty$) nakładom kapitału K i/lub pracy L odpowiada bardzo duży (dążący do $+\infty$) strumień wytworzonego produktu.

III $\partial F/\partial K>0$ i $\partial F/\partial L>0$, czyli wzrost nakładów któregokolwiek z czynników produkcji (*ceteris paribus*) prowadzi do wzrostu strumienia wytworzonego produktu.

IV Zachodzą warunki Inady postaci: $\lim\limits_{K \to 0^+} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to 0^+} \frac{\partial F}{\partial L} = +\infty$ oraz $\lim\limits_{K \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim\limits_{L \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0$. Warunki te interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że bardzo małym (bardzo dużym) nakładom jednego z czynników produkcji odpowiada bardzo duży (bardzo mały) krańcowy produkt owego czynnika produkcji.

V $\partial^2 F/\partial K^2 < 0$ i $\partial^2 F/\partial L^2 < 0$, co oznacza, że wraz ze wzrostem nakładów każdego z czynników produkcji jego krańcowy produkt maleje. Stąd oraz z warunków Inady wynika, że jeśli nakłady któregokolwiek rosną od 0 do $+\infty$, to (*ceteris paribus*) jego krańcowy produkt spada od $+\infty$ do 0.

VI Funkcja produkcji F jest jednorodna stopnia pierwszego. Wynika stąd, że dowolne ζ-krotne (przy $\zeta > 0$) zwiększenie nakładów każdego z czynników produkcji prowadzi do dokładnie ζ-krotnego wzrostu produktu. Właściwość ta nazywana jest również w literaturze ekonomicznej stałymi efektami skali (lub stałymi korzyściami skali).

[1] Punkty 2-4 prezentowanego opracowania w znacznej mierze oparte są na pracy Tokarskiego [2009a]. Por. też Tokarski [2009b].

[2] *Implicite* o wszystkich wykorzystywanych dalej funkcjach zakładamy, że są odpowiednią ilość razy różniczkowalne w swoich dziedzinach.

Korzystając z założenia o stałych efektach skali można przejść z agregatowej funkcji produkcji $Y = F(K, L)$ na funkcję wydajności pracy $y = f(k)$, gdzie $y \equiv Y/L$ to wydajność pracy (produkt na pracującego), zaś $k \equiv K/L$ oznacza techniczne uzbrojenie pracy (kapitał rzeczowy na pracującego). Można pokazać, iż funkcja wydajności pracy $y = f(k)$ charakteryzuje się m.in. następującymi właściwościami (por. też np. Chiang [1994, s. 412–414] lub Tokarski [2009b, rozdział 1]):

I. $f(0) = 0$,

II. $\lim_{k \to +\infty} f(k) = +\infty$,

III. $df/dk > 0$,

IV. $\lim_{k \to 0^+} \frac{df}{dk} = +\infty$ i $\lim_{k \to +\infty} \frac{df}{dk} = 0$,

V. $d^2f/dk^2 < 0$.

Korzystając z właściwości neoklasycznej funkcji produkcji można wyprowadzić tzw. równanie reszt Solowa [1957], które opisuje stopę postępu technicznego w gospodarce (por. też Harcourt [1975, s. 97–102]). Równanie reszt Solowa można wyprowadzić z funkcji $Y = AF(K, L)$, gdzie A oznacza łączną produkcyjność czynników produkcji, zaś $F(K, L)$ jest neoklasyczną funkcją produkcji, przy czym $F(1,1) = 1$. Jeśli dodatkowo założy się, iż Y, A, K oraz L są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0; +\infty)$, to można pokazać, że[3]:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\frac{\dot{L}}{L}. \tag{1}$$

Równanie (1) interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że stopa wzrostu produkcji $\dot{Y}/Y$ jest sumą stopy postępu technicznego $\dot{A}/A$ (równej stopie wzrostu łącznej produkcyjności czynników produkcji) oraz sumy stóp wzrostu nakładów kapitału $\dot{K}/K$ i pracy $\dot{L}/L$ ważonych elastycznościami produkcji względem nakładów owych czynników produkcji[4]. Jeśli teraz uwzględni się marginalną teorię podziału Clarka (tj. teoremat, że w warunkach gospodarki doskonale konkurencyjnej każdy z czynników produkcji musi być opłacany

[3] Zapis $\dot{x} \equiv dx/dt$ oznaczał będzie dalej pochodną zmiennej x po czasie t, czyli – ekonomicznie rzecz ujmując – przyrost wartości owej zmiennej w momencie t.

[4] Wyrażenie $\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{Y}$ $\left(\frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{Y}\right)$ w równaniu (1) to elastyczność produktu względem nakładów kapitału (pracy).

zgodnie z jego produktem krańcowym[5]), to ceny czynników produkcji (realna stopa procentowa r i płaca realna w) są równe, odpowiednio, $\partial F/\partial K$ i $\partial F/\partial L$. Wstawiając powyższe równania do związku (1) otrzymuje się zależność:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{A}}{A}+\frac{rK}{Y}\frac{\dot{K}}{K}+\frac{wL}{Y}\frac{\dot{L}}{L}=\frac{\dot{A}}{A}+\alpha_K\frac{\dot{K}}{K}+\alpha_L\frac{\dot{L}}{L}, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_K \equiv rK/Y$ oraz $\alpha_L \equiv wL/Y$ są udziałami kapitału i pracy w produkcie.

Ponieważ udziały nakładów czynników produkcji w produkcie muszą sumować się do jedności, zatem np. $\alpha_L = 1-\alpha_K$. Wstawiając powyższą zależność do równania (2) otrzymuje się:

$$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{A}}{A}+\alpha_K\frac{\dot{K}}{K}+(1-\alpha_K)\frac{\dot{L}}{L} \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{\dot{L}}{L}=\frac{\dot{A}}{A}+\alpha_K\left(\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}\right). \tag{3}$$

Podstawiając w równaniu (3) $\dot{y}/y=\dot{Y}/Y-\dot{L}/L$ oraz $\dot{k}/k=\dot{K}/K-\dot{L}/L$ (gdzie $\dot{y}/y$ i $\dot{k}/k$ oznacza, odpowiednio, stopy wzrostu wydajności pracy i technicznego uzbrojenia pracy), można je przekształcić i zapisać następująco:

$$\frac{\dot{A}}{A}=\frac{\dot{y}}{y}-\alpha_K\frac{\dot{k}}{k}. \tag{4}$$

Równanie (4) nazywane jest w literaturze ekonomicznej równaniem reszt Solowa. Pozwala ono na oszacowanie stopy postępu technicznego w gospodarce. Z równania tego wynika, że stopa postępu technicznego $\dot{A}/A$ jest różnicą pomiędzy stopą wzrostu wydajności pracy $\dot{y}/y$ a stopą wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $\dot{k}/k$ ważoną udziałem nakładów kapitału w produkcie α_K.

W swoim artykule z 1957 roku Solow, licząc stopy wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy oraz udziały nakładów kapitału w produkcie (w nierolniczym sektorze prywatnym w Stanach Zjednoczonych w latach 1909–1949) oszacował, że stopa postępu technicznego w gospodarce amerykańskiej wynosiła ok. 1% rocznie w latach 1909–1929 oraz ok. 2% w drugiej połowie analizowanego przezeń okresu. Oznaczało to, że udział postępu technicznego we wzroście wydajności pracy w rozważanym przez Solowa okresie wynosił ok. 87,5%, zaś

[5] Por. np. Tokarski [2011a, rozdział 8].

pozostałe 12,5% wzrostu produktu na pracującego było efektem akumulacji kapitału rzeczowego (por. Solow [1957] lub Harcourt [1975, s. 97–112]).

3. Neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego

Na bazie neoklasycznej funkcji produkcji powstał również neoklasyczny model wzrostu Solowa [1956]. W modelu wzrostu Solowa z postępem technicznym w sensie Harroda[6] przyjmuje się następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie (szerzej na ten temat por. np. Tokarski [2009b, rozdział 2] lub Tokarski [2011b, rozdział 5]):

I. Proces produkcyjny opisany jest przez neoklasyczną funkcję produkcji postaci: $Y = F(K, E)$, gdzie $E \equiv AL$ jest zasobem efektywnej pracy rozumianym jako iloczyn liczby pracujących L i dostępnej w gospodarce wiedzy naukowo-technicznej A.

II. Przyrost zasobu kapitału rzeczowego równy jest różnicy między inwestycjami (zdeterminowanymi przez oszczędności) a deprecjacją kapitału. Założenie to można zapisać przy pomocy następującego równania różniczkowego: $\dot{K} = sY - \delta K$, gdzie $s \in (0;1)$ jest stopą oszczędności/inwestycji, zaś $\delta \in (0;1)$ to stopa deprecjacji kapitału.

III. Zasoby pracy L i wiedzy A rosną według danych egzogenicznie stóp wzrostu równych n oraz g (n, $g > 0$). Wynika stąd, że zasób efektywnej pracy E rośnie według stopy wzrostu $\mu = g + n$, czyli: $\dot{E}/E = \mu$.

Opierając się na takim zbiorze założeń można wyprowadzić równanie Solowa dane wzorem:

$$\dot{k}_E = sf(k_E) - (\delta + \mu)k_E, \tag{5}$$

gdzie $k_E \equiv Y/E$ oznacza produkt na jednostkę efektywnej pracy, zaś f jest neoklasyczną funkcją wydajności pracy. Równanie Solowa (5) można interpretować ekonomicznie w ten sposób, że przyrost kapitału na jednostkę efektywnej pracy $\dot{k}_E$ jest równy różnicy pomiędzy oszczędnościami/inwestycjami na jednostkę efektywnej pracy $sf(k_E)$ a ubytkiem kapitału na jednostkę efektywnej pracy $(\delta + \mu)k_E$, który to ubytek można rozłożyć na ubytek wynikający z deprecjacji kapitału (δk_E) oraz ze wzrostu jednostek efektywnej pracy (μk_E). Korzystając z właściwości funkcji f oraz z równania Solowa można pokazać, że istnieje pe-

[6] Tj. takim postępem technicznym, który bezpośrednio potęguje produkcyjność pracy.

wien zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_E^*, przy którym $\dot{k}_E = 0$. Co więcej, bez względu na wyjściowe wartości wszystkich zmiennych w modelu wzrostu Solowa (poza $k_E = 0$) gospodarka musi dojść do zasobu k_E^*. Zatem ów zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy można traktować jako zasób w długookresowej równowadze Solowa. Stąd zaś oraz z właściwości funkcji f wynika, że wówczas istnieje również pewien strumień produktu na jednostkę efektywnej pracy $y_E^* = f\left(k_E^*\right)$, do którego dąży gospodarka w długim okresie.

Ponieważ $k \equiv Ak_E$ oraz $y \equiv Ay_E$, zaś z założenia III. modelu Solowa wynika, iż: $\dot{A}/A = g$, zatem w długookresowej równowadze analizowanego modelu wzrostu gospodarczego wydajność pracy y i techniczne uzbrojenie pracy k rosną według stopy wzrostu równej stopie harrodiańskiego postępu technicznego g. Co więcej, można pokazać (por. np. Tokarski [2009b, rozdział 2] lub Tokarski [2011b, rozdział 5]), że w warunkach długookresowej równowagi Solowa (po pierwsze) stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych przypadających na pracującego są zdeterminowane przez stopę egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda oraz (po drugie) położenie długookresowych ścieżek wzrostu wydajności pracy i technicznego uzbrojenia pracy jest tym wyższe, im wyższe jest stopa oszczędności/inwestycji oraz im niższe są stopa deprecjacji kapitału i stopa wzrostu liczby pracujących. Wynika stąd, że wzrost stopy oszczędności/inwestycji s lub spadek $\delta+n$ mogą doprowadzić do sytuacji, w której stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy będą (w okresie przejściowym) wyższe od stopy harrodiańskiego postępu technicznego. Oznacza to, że wówczas gospodarka w krótkim i średnim okresie wspina się na wyżej położoną, długookresową ścieżkę wzrostu gospodarczego. Po jej osiągnięciu stopy wzrostu y oraz k kształtują się na poziomie odpowiadającym stopie harrodiańskiego postępu technicznego.

Model wzrostu gospodarczego Solowa stał się także inspiracją dla Phelpsa [1961] do stworzenia tzw. złotej reguły akumulacji kapitału[7]. Przez złotą regułę akumulacji Phelpsa rozumie się sytuację, w której gospodarka Solowa znajduje się w takiej długookresowej równowadze, która maksymalizuje konsumpcję na pracującego (przy założeniu, że w gospodarce nie występuje postęp techniczny). Oznacza to, że złotą regułą akumulacji Phelpsa jest stopa oszczędności inwestycji $s_g \in (0;1)$, przy której $c^* = (1-s)y^*$ osiąga maksimum względem s (gdzie c^* oznacza konsumpcję na pracującego, y^* to wydajność pracy w warunkach równowagi Solowa, zaś s jest stopą oszczędności/inwestycji). Problem ten toż-

[7] Uogólnienie owej reguły na dwu- i wielokapitałowe, neoklasyczne modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa, Romera, Weila [1992] oraz Nonnemana-Vanhoudta [1996] znaleźć można w pracach Dykasa, Sulimy, Tokarskiego [2008] oraz Tokarskiego [2009b, 2011b].

samy jest z maksymalizacją wyrażenia: $c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$ ze względu na k^*. Można pokazać, że c^* maksymalizowane jest względem k^* wówczas, gdy zachodzi związek:

$$\frac{df(k^*)}{dk^*} = \delta + n\ . \tag{6}$$

Z równania (6) wynika, że złotą regułą akumulacji kapitału Phelpsa jest taki zasób kapitału na pracującego k_g^*, przy którym krańcowy produkt kapitału na pracującego $df(k^*)/dk^*$ równy jest stopie ubytku technicznego uzbrojenia pracy $\delta + n$. Ponieważ zaś długookresowy zasób kapitału k^* jest rosnącą funkcją stopy oszczędności/inwestycji s, zatem złotą stopą oszczędności/inwestycji jest taka stopa s_g, przy której zasób kapitału k_g^* spełnia warunek (6). Jeśli zaś wykorzysta się w modelu wzrostu Solowa funkcję produkcji Cobba-Douglasa, to okaże się, iż złotą stopą oszczędności/inwestycji jest $s_g = \alpha$, gdzie $\alpha \in (0;1)$ jest udziałem nakładów kapitału w produkcie.

Próby rozszerzenia modelu wzrostu Solowa można znaleźć także np. w pracach Tokarskiego [2003abc i 2008]. W pracach Tokarskiego [2003a, 2008] szuka się długookresowych ścieżek wzrostu gospodarczego nie tylko w warunkach stałych efektów skali (jak ma to miejsce w oryginalnych, neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego), ale także w warunkach rosnących lub malejących efektów skali. Z prowadzonych tam rozważań wynika, że jeśli w gospodarce występują rosnące lub malejące efekty skali, to długookresowa stopa wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych zależna jest nie tylko od stopy egzogenicznego postępu technicznego, lecz również od rodzaju uzyskiwanych efektów skali (wniosek ten prawdziwy jest również na gruncie neoklasycznych modeli wzrostu Mankiwa-Romera-Weila [1992] oraz Nonnemana-Vanhoudta [1996] – por. też Tokarski [2009b]). Oznacza to, że w warunkach rosnących efektów skali istotnym katalizatorem długookresowego wzrostu gospodarczego mogą być wszelkie polityki rynku pracy, które prowadzą do podniesienia długookresowych stóp wzrostu liczby pracujących.

W pracy Tokarskiego [2003b] znajduje się próba kompilacji neoklasycznego modelu wzrostu Solowa z keynesistowskim modelem wzrostu Domara [1962] w celu wyznaczenia długookresowych reguł polityki monetarnej. W modelu tym przyjmuje się m.in., że popytowa strona gospodarki jest opisana przez równania zbliżone do równania zagregowanego popytu występującego w modelu Domara, zaś podażowa strona gospodarki jest taka, jak w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa. Co więcej, w modelu tym zakłada się, iż stopa procentowa oddziałuje na inwestycje (które – z kolei – oddziałują zarówno na popytową, jak i podażową stronę gospodarki), zaś podaż pracy rośnie według pewnej stałej, danej egzogenicznie stopy wzrostu.

Na gruncie tak zadanego modelu gospodarki szuka się ścieżki czasowej realnej stopy procentowej gwarantującej spełnienie trzech następujących warunków:

I. Bank centralny nie dopuszcza do tego, by zagregowany popyt przekroczył wielkość produktu potencjalnego, gdyż wówczas nadwyżkowy popyt wywołałby presję inflacyjną.

II. Bank centralny dostosowuje wielkość zagregowanego popytu w gospodarce do produkcji potencjalnej, co zapobiega powstaniu niewykorzystanych zdolności produkcyjnych w gospodarce.

III. Zakładając, że w wyjściowym momencie $t = 0$ stopa bezrobocia była stopą bezrobocia równowagi, bank centralny nie dopuszcza do tego, by stopa ta uległa zmianie. Założenie to *implicite* oznacza, że bank centralny musi znaleźć taką ścieżkę czasową realnych stóp procentowych, aby liczba pracujących rosła według stopy wzrostu równej stopie wzrostu podaży pracy.

Rozwiązanie tak zadanego modelu wzrostu gospodarczego prowadzi m.in. do następujących wniosków. Po pierwsze, istnieje długookresowa ścieżka wzrostu realnej stopy procentowej, która zapewnia gospodarce pełne wykorzystanie istniejących weń zdolności produkcyjnych. Po drugie, w warunkach równowagi typu Domara-Solowa, uwzględniającej wspomniane wcześniej reguły polityki monetarnej, długookresowe stopy wzrostu zasobu kapitału i strumienia produktu (podobnie jak w neoklasycznych modelach wzrostu Solowa, Mankiwa-Romera-Weila i Nonnemana-Vanhoudta) kształtują się na pewnym, ustalonym poziomie, wynikającym głównie ze stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda oraz ze stopy wzrostu liczby pracujących. Po trzecie, rozwiązanie modelu typu Domara-Solowa wyznacza długookresowe ścieżki wzrostu kapitału i produktu o niższym nachyleniu, niż ma to miejsce w przypadku modeli Solowa, Mankiwa-Romera-Weila i Nonnemana-Vanhoudta. Wynika to stąd, iż w modelach neoklasycznych nie uwzględnia się ograniczeń popytowych (związanych ze wzrostem gospodarczy) i analizuje się jedynie kształtowanie się ścieżek produktu potencjalnego. Natomiast „*w rzeczywistości, która jest przedmiotem opisu, nie jest na ogół spełnione teoretyczne założenie, iż produkcja realizuje się na poziomie potencjalnie określonym*” (Welfe [2000, s. 64]). Uwzględnienie zaś popytowych ograniczeń procesów wzrostu gospodarczego prowadzi do rozwiązania o niższych długookresowych stopach wzrostu od tych, które występują w oryginalnych, neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego.

Można również połączyć modele wzrostu Solowa, Mankiwa-Romera-Weila i Nonnemana-Vanhoudta z modelami płac efektywnościowych Solowa [1979] i Summersa [1988] (por. Tokarski [2003, 2009b, rozdział 6]). Celem takiej kompilacji neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego z modelami płac efektywnościowych jest próba endogenizacji popytu na pracę i liczby pracujących wewnątrz modelu wzrostu gospodarczego. Podstawowe wnioski, które płyną z takiej kompilacji owych modeli, są następujące. Po pierwsze, w długookresowej równowadze wzrostu gospodarczego stopy wzrostu liczby pracujących są zdeterminowane dodatnio przez stopę wzrostu kapitału (lub stopy wzrostu różnych, zdezagregowanych zasobów kapitału), stopę egzogenicznego postępu technicznego oraz przez stopę wzrostu podaży pracy. Po drugie, w długim okresie stopa wzrostu liczby pracujących jest tym wyższa, im słabiej płace reagują na zmianę wydajności pracy i zmianę stopy bezrobocia.

Inne rozszerzenia neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa, to powstałe w latach dziewięćdziesiątych XX wieku uogólnienia modelu Solowa na przypadki, w których w gospodarce wykorzystuje się dwa zasoby kapitałowe (kapitał rzeczowy i kapitał ludzki) lub skończoną liczbę N różnych zasobów kapitałowych. Pierwszym z tych uogólnień jest model Mankiwa-Romera-Weila z 1992 roku, zaś drugim – model Nonnemana-Vanhoudta z 1996 roku.

Założenia modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa-Romera-Weila opisuje następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned}
&Y = K^{\alpha} H^{\beta} E^{1-\alpha-\beta}, \ \alpha, \beta, (\alpha+\beta) \in (0;1) \\
&\dot{K} = s_K Y - \delta_K K, \ s_K, \delta_K \in (0;1) \\
&\dot{H} = s_H Y - \delta_H H, \ s_H, (s_K + s_H), \delta_H \in (0;1) \\
&E \equiv AL > 0 \\
&\dot{A}/A = g > 0 \ \wedge \ \dot{L}/L = n > 0
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Kolejne równania układu równań (7) interpretuje się ekonomicznie następująco. Wielkość produktu Y zależna jest od nakładów kapitału rzeczowego K, ludzkiego L oraz od jednostek efektywnej pracy E. Parametry α, β oraz $1-\alpha-\beta$ w pierwszym z równań układu równań (7) są elastycznościami Y względem (odpowiednio) K, H i E lub – na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka – udziałami nakładów owych czynników produkcji w produkcie. Z drugiego (trzeciego) równania układu (7) wynika, że przyrost zasobu kapitału rzeczowego $\dot{K}$ (ludzkiego $\dot{H}$) równy jest różnicy pomiędzy inwestycjami $s_K Y$ ($s_H Y$) w ów zasób a jego deprecjacją $\delta_K K$ ($\delta_H H$). Jednostki efektywnej pracy E są iloczynem liczby pracujących L i zasobu wiedzy A. Wiedza A rośnie według egzogenicznej stopy wzrostu g (która jest stopą egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda), natomiast liczba pracujących L – wedle stopy wzrostu n.

Z założeń modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila można wyprowadzić równania ruchu owego modelu, które opisują związki:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k}_E &= s_K (k_E)^\alpha (h_E)^\beta - (\delta_K + g + n) k_E \\ \dot{h}_E &= s_H (k_E)^\alpha (h_E)^\beta - (\delta_H + g + n) h_E \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

gdzie $k_E \equiv K/E$ oraz $h_E \equiv H/E$ to (odpowiednio) zasób kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy. Równania ruchu (8) modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa-Romera-Weila stanowią uogólnienie równania Solowa (5). Dlatego też interpretuje je się w ten sposób, iż przyrost zasobu kapitału rzeczowego $\dot{k}_E$ (ludzkiego $\dot{h}_E$) na jednostkę efektywnej pracy stanowi różnicę pomiędzy inwestycjami $s_K (k_E)^\alpha (h_E)^\beta$ $\left(s_H (k_E)^\alpha (h_E)^\beta\right)$ w ów zasób, przypadającymi na jednostkę tejże pracy, a ubytkiem $(\delta_K + g + n) k_E$ $\left((\delta_K + g + n) k_E\right)$ kapitału rzeczowego (ludzkiego) na jednostkę efektywnej pracy, który to ubytek wynika zarówno z deprecjacji kapitału rzeczowego (ludzkiego) $\delta_K k_E$ ($\delta_H h_E$), jak i ze wzrostu jednostek efektywnej pracy $(g + n)k_E$ ($(g + n)h_E$).

Rozważając układ równań różniczkowych (8) – por. np. Tokarski [2009b, rozdział 3] – wyciągnąć można następujące wnioski. Po pierwsze, układów posiada stabilne rozwiązanie, które wyznacza zasoby kapitału rzeczowego k_E^* (ludzkiego h_E^*) oraz, *implicite*, strumień produktu y_E^* na jednostkę efektywnej pracy w długookresowej równowadze gospodarki Mankiwa-Romera-Weila. Po drugie, w warunkach długookresowej równowagi wydajność pracy y, techniczne uzbrojenie pracy k oraz kapitał ludzki na pracującego h rosną według stóp wzrostu równych stopie harrodiańskiego postępu technicznego g. Po trzecie, w warunkach długookresowej równowagi Mankiwa-Romera-Weila położenie ścieżek wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy oraz kapitału ludzkiego na pracującego zależne jest m.in. od stóp inwestycji s_K i s_H, stóp deprecjacji δ_K i δ_H oraz stopy wzrostu liczby pracujących n. Po czwarte, wysokim stopom inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego (czyli wysokim wartościom s_K i s_H) odpowiadają wysoko położone ścieżki wzrostu y, k oraz h w długim okresie. Po piątek, wysokie stopy deprecjacji owych kapitałów δ_K i δ_H i/lub wysoka stopa wzrostu liczby pracujących n prowadzi do niskiego położenia długookresowych ścieżek wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy oraz kapitału ludzkiego na pracującego.

Kolejnym rozszerzeniem neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa jest model Nonnemana-Vanhoudta. Model ten stanowi także uogólnienie modelu Mankiwa-Romera-Weila z tego względu, że model Mankiwa-Romera-Weila jest modelem z dwoma zasobami kapitału (kapitałem rzeczowym i ludzkim), natomiast model Nonnemana-Vanhoudta jest modelem z dowolną, skończoną liczbą N substytucyjnych w stosunku do siebie zasobów kapitałowych. Założenia modelu Nonnemana-Vanhoudta dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie opisuje następujący układ równań[8]:

$$\left.\begin{array}{l} Y=\prod_{i=1}^{N} K_i^{\alpha_i} E^{1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i}, \quad \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N,\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\in(0;1) \\ \forall i=1,2,\ldots,N \quad \dot{K}_i=s_iY-\delta_iK_i,\ s_1,s_2,\ldots,s_N,\sum_{j=1}^{N}s_j,\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N\in(0;1) \\ E\equiv AL \\ \dot{A}/A=g>0 \ \wedge\ \dot{L}/L=n>0 \end{array}\right\}, \quad (9)$$

gdzie Y oznacza strumień wytworzonego produktu, K_i (dla każdego $i = 1,2,\ldots,N$) to nakłady i-tego zasobu kapitału, E – jednostki efektywnej pracy, α_i (dla i=1,2,…,N) są elastycznościami strumienia wytworzonego produktu względem kolejnych nakładów kapitału lub – na gruncie teorii podziału – udziały owych nakładów kapitału w produkcie[9], s_i (dla każdego i) są stopami inwestycji w i-ty zasób kapitału, δ_i – stopy deprecjacji owych zasobów, A oraz L to zasoby wiedzy i pracy, zaś g oraz n oznaczają stopy wzrostu owych zasobów (a zatem g jest również stopą egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda). Poszczególne równania układu równań (9) interpretuje się ekonomicznie następująco (por. też założenia modeli wzrostu Solowa oraz Mankiwa-Romera-Weila). Wielkość produkcji zależna jest od nakładów każdego z N zasobów kapitałowych oraz od jednostek efektywnej pracy. Przyrost każdego z zasobów kapitału

[8] W oryginalnym artykule Nonnemana-Vanhoudta [1996] nie bada się długookresowej stabilności rozwiązania owego modelu wzrostu gospodarczego. Dowód owej stabilności znaleźć można w artykułach Dykasa, Sulimy, Tokarskiego [2008] i Dykasa, Tokarskiego [2010]. Natomiast w pracy Dykasa, Edigariana, Tokarskiego [2010] znajduje się uogólnienie modelu Nonnemana-Vanhoudta (wraz z dowodem stabilności uzyskanego rozwiązania) na przypadek gospodarki, w której proces produkcyjny opisuje nie funkcja produkcji Cobba-Douglasa, ale ogólna, neoklasyczna, N+1 czynnikowa funkcja produkcji.

[9] Stąd zaś wynika, że wyrażenie $1-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$ to albo elastyczność produktu Y względem nakładów efektywnej pracy E, bądź też udział nakładów owej pracy w wytworzonym produkcie.

$\dot{K}$ równy jest różnicy między inwestycjami w ów zasób $s_i Y$ a jego deprecjacją $\delta_i K_i$. Jednostki efektywnej pracy E są iloczynem liczby pracujących L i dostępnej wiedzy A. Zasoby L oraz A rosną według stóp wzrostu równych (odpowiednio) n oraz g.

Podstawiając zaś za $k_{Ei} \equiv K_i / E$ (dla każdego i=1,2, …, N) zasób i-tego kapitału na jednostkę efektywnej pracy, można wyprowadzić równania ruchu modelu Nonnemana-Vanhoudta dane wzorami:

$$\forall i = 1,2,\ldots,N \qquad \dot{k}_{Ei} = s_i \prod_{j=1}^{N} k_{Ej}^{\alpha_j} - (\delta_i + g + n) k_{Ei} . \tag{10}$$

Równania ruchu (10) stanowią uogólnienie równań ruchu (8) modelu Mankiwa-Romera-Weila. Stąd też interpretuje je się ekonomicznie następująco. Przyrost i-tego zasobu kapitału na jednostkę efektywnej pracy $\dot{k}_{Ei}$ jest różnicą pomiędzy inwestycjami w ten zasób $s_i \prod_{j=1}^{N} k_{Ej}^{\alpha_j}$ a jego ubytkiem $(\delta_i + g + n)k_{Ei}$.

Układ równań ruchu (10) modelu Nonnemana-Vanhoudta, podobnie jak układ równań ruchu (8) modelu Mankiwa-Romera-Weila, posiada stabilne położenie długookresowej równowagi (por. Dykas, Sulima, Tokarski [2008], Dykas, Edigarian, Tokarski [2010] lub Dykas, Tokarski [2010]). W warunkach owej równowaga kolejne zasoby kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_{Ei} oraz strumień produktu na jednostkę owej pracy y_E dążą do pewnych, stałych wielkości k_{Ei}^* oraz y_E^*. Wówczas, po pierwsze, stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego $k_i \equiv K_i/L$ oraz strumienia wydajności pracy $y \equiv Y/L$ – podobnie jak ma to miejsce w modelach Solowa i Mankiwa-Romera-Weila – rosną według stopy wzrostu równej stopie postępu technicznego w sensie Harroda, po drugie, położenie długookresowych ścieżek wzrostu k_i oraz y jest tym wyższe, im wyższe są stopy inwestycji s_j (dla j=1,2, …, N) i, po trzecie, położenie to jest tym wyższe, im niższe wartości przyjmują stopy deprecjacji kolejnych zasobów kapitału δ_j i/lub stopa wzrostu liczby pracujących n [10].

[10] Przedstawione tu wnioski prawdziwe są zarówno na gruncie modelu Nonnemana-Vanhoudta z funkcją produkcji Cobba-Douglasa, jak i na gruncie modelu uogólnionego, z dowolną, neoklasyczną funkcją produkcji (por. Dykas, Edigarian, Tokarski [2010] lub Sulima [2010]).

4. Endogeniczne modele wzrostu gospodarczego (modele optymalnego sterowania)

W neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego przyjmuje się założenie, że stopa inwestycji (lub stopy inwestycji) mają charakter zmiennych egzogenicznych. W modelach wzrostu endogenicznego uchyla się to założenie, zastępując je hipotezą, że stopa inwestycji (lub stopy inwestycji) kształtują się na takim poziomie, by maksymalizować sumę zdyskontowanej użyteczności konsumpcji typowego podmiotu w gospodarce. Modele te oparte są na silnym założeniu nowej ekonomii klasycznej o długookresowej racjonalności typowych podmiotów mikroekonomicznych (utożsamianych dalej z typowym konsumentem w gospodarce). Warto jednak w tym miejscu zauważyć, że o ile w modelach nowej ekonomii klasycznej *a priori* przyjmuje się, że zachowania i oczekiwania typowych podmiotów mikroekonomicznych są racjonalne tak w długim, jak i w krótkim okresie, o tyle w modelach wzrostu endogenicznego założenie to ogranicza się jedynie do okresu długiego (abstrahując od tego, co dzieje się w krótkim okresie).

Ponadto w modelach wzrostu endogenicznego „*uwzględnia się występowanie efektów zewnętrznych związanych z wykorzystaniem wiedzy, postępu technologicznego lub kapitału. Inwestycje (zarówno w kapitał rzeczowy, jak i ludzki) prowadzą wówczas do wzrostu produktywności, który jest wyższy od prywatnych korzyści. Jeśli efekty zewnętrzne są na tyle silne, by zneutralizować działanie malejących przychodów, to pozytywne sprzężenie między wiedzą a inwestycjami może w sposób trwały oddziaływać na tempo wzrostu”* (Wojtyna [1996, s. 6]). Oznacza to, że w modelach wzrostu endogenicznego odrzuca się neoklasyczne założenie o stałych efektach skali agregatowej funkcji produkcji (por. też np. Tokarski [2001]).

Modele wzrostu endogenicznego zazwyczaj są oparte na matematycznej teorii optymalnego sterowania, wykorzystującej zasadę maksimum Pontriagina. Stąd też modele te można nazwać modelami optymalnego sterowania.

Do podstawowych modeli wzrostu endogenicznego zalicza się modele Lucasa [1988, 1990, 1993] (por. też Lucas [2010]) oraz Romera [1986, 1990]. Ponadto w tej części prezentowanego opracowania scharakteryzowany będzie również prosty model optymalnego sterowania oparty na założeniach *N*-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta, który został zaproponowany w pracy Tokarskiego [2007].

W modelu wzrostu endogenicznego Lucasa przyjmuje się następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie (Lucas [1988, s. 7–8], por. też np. Tokarski [2009b, rozdział 10]):

I. Typowy, zachowujący się racjonalnie konsument (podmiot gospodarczy) maksymalizuje sumę zdyskontowanej użyteczności konsumpcji w nieskończonym przedziale czasowym. Suma ta maksymalizowana jest przez następującą całkę niewłaściwą (nazywaną dalej również całką preferencji owego konsumenta):

$$\int_0^{+\infty} \frac{(c(t))^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt, \tag{11}$$

gdzie c jest konsumpcją typowego konsumenta w gospodarce Lucasa (utożsamianą z konsumpcją na pracującego), $\sigma \in (0;1)\cup(1;+\infty)$ to odwrotność międzyokresowej substytucji konsumpcji owego konsumenta, zaś $\rho > 0$ to jego stopa dyskontowa.

II. Agregatowa funkcja produkcji dana jest wzorem:

$$Y = h^{\beta} K^{\alpha} (\Xi h L)^{1-\alpha}, \tag{12}$$

przy czym α i $(1-\alpha) \in (0;1)$ są elastycznościami strumienia produktu Y nakładów kapitału rzeczowego K oraz nakładów pracy w sferze produkcji ΞhL, $\Xi \in (0;1)$ oznacza udział czasu przeznaczonego na pracę, który jest wykorzystywany do pracy w sferze produkcji dóbr i usług, h jest zasobem kapitału ludzkiego typowego konsumenta-pracownika w gospodarce, $\beta \in [0;1)$ jest zaś siłą oddziaływania tzw. procesów zewnętrznych akumulacji kapitału ludzkiego.

III. Przyrost zasobu kapitału rzeczowego opisuje równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{K} = I - \delta K = Y - C - \delta K, \tag{13}$$

gdzie I oznacza inwestycje (równe różnicy pomiędzy produkcją Y a konsumpcją C), natomiast $\delta \in (0;1)$ to stopa deprecjacji kapitału.

IV. Przyrost zasobu kapitału ludzkiego opisuje tzw. funkcja Uzawy-Rosena dana wzorem:

$$\dot{h} = \kappa(1-\Xi)h, \tag{14}$$

gdzie $\kappa \in (0;1)$ jest maksymalną, możliwą do uzyskania, stopą wzrostu zasobu kapitału ludzkiego.

V. Liczba pracujących rośnie według stopy wzrostu $n>0$, czyli:

$$\dot{L}/L = n. \tag{15}$$

VI. Gospodarka charakteryzuje się stałymi stopami wzrostu $g = \dot{y}/y = \dot{k}/k = \dot{c}/c$ i $g_h = \dot{h}/h$ (gdzie $y \equiv Y/L$, $k \equiv K/L$ i $c \equiv C/L$) oraz stałym udziałem czasu przeznaczonego na działalność w sferze produkcji $\Xi(t) = \Xi^* \in (0;1)$ (dla dowolnego $t \geq 0$).

Problem wyznaczenia optymalnej ścieżki wzrostu gospodarczego w modelu wzrostu endogenicznego Lucasa sprowadza się do maksymalizacji całki preferencji (11) przy ograniczeniu równaniami (12–15). Problem ten można rozwiązać za pomocą ekstremum Pontriagina. Można pokazać (por. Tokarski [2009b, rozdział 10]), że przy założeniach I.–VI. optymalne stopy wzrostu g i g_h oraz optymalny udział czasu przeznaczony na działalność w sferze produkcji Ξ^* dane są wzorami:

$$g = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}\kappa - \rho\right), \tag{16a}$$

$$g_h = \frac{1}{\sigma}\left(\kappa - \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\beta}\rho\right) \tag{16b}$$

oraz:

$$\Xi^* = 1 - \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{(1-\alpha)\rho}{(1-\alpha+\beta)\kappa}\right]. \tag{16c}$$

Z równań (16abc) (przy dodatkowym założeniu, że zachodzi również nierówność: $\frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} \geq \frac{\rho}{\kappa} \geq \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha}(1-\sigma)$) wynika, iż stopy wzrostu strumieni produkcji i konsumpcji oraz zasobu kapitału rzeczowego (wszystkie strumienie na pracującego) i indywidualnych kwalifikacji pracowników w gospodarce zależne są, w głównej mierze, od czynników opisujących preferencje, co do struktury konsumpcji w czasie (a więc od międzyokresowej substytucji konsumpcji $1/\sigma$ i od stopy dyskontowej ρ typowego konsumenta). Co więcej, im bardziej konsumenci w gospodarce Lucasa preferować będą konsumpcję bieżącą w stosunku do konsumpcji przyszłej (czyli im większe będzie $1/\sigma$, lub im niższe będzie ρ), tym niższe stopy wzrostu będą uzyskiwać podstawowe zmienne makroekonomiczne. Dlatego też w modelu wzrostu gospodarczego Lucasa (w przeciwieństwie do analizowanych poprzednio, neoklasycznych modeli wzrostu) możliwe jest trwałe podniesienie stóp wzrostu gospodarczego. Należy jednak zaznaczyć, iż trwałe podniesienie długookresowych stóp wzrostu gospodarczego musi być połączone ze zmianą preferencji konsumentów w stosunku do struktury konsumpcji w czasie.

Innym, podstawowym modelem wzrostu endogenicznego jest model Romera. W modelu tym czyni się następujące założenia opisujące funkcjonowanie gospodarki:

I. W gospodarce istnienie skończony, niezmienny w czasie zasób kapitału ludzkiego H>0. Kapitał ów jest dzielony na część zaangażowaną w sferze produkcji dóbr i usług (równą H_Y) oraz część, która jest wykorzystywana w tworzeniu nowej wiedzy naukowo-technicznej (wynoszącą H_A). Oznacza to, iż spełnione jest równanie:

$$H = H_Y + H_A . \tag{17}$$

II. Zasób wiedzy naukowo-technicznej A zmienia się w czasie zgodnie z następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{A} = \kappa H_A A , \tag{18}$$

gdzie $\kappa > 0$ jest współczynnikiem efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze kreacji wiedzy naukowo-technicznej.

III. Strumień produktu Y opisany jest przez funkcję produkcji postaci:

$$Y = (H_Y)^\beta L^\alpha \int_0^A [x(i)]^{1-\alpha-\beta} di , \tag{19}$$

gdzie $x(i)$ jest nakładem i-tego dobra kapitałowego, natomiast $i \in (0;A)$, co oznacza, że ilość dóbr kapitałowych i (wykorzystywanych w procesach produkcyjnych w gospodarce) jest zależna od istniejącego w niej zasobu wiedzy naukowo-technicznej. Natomiast parametry α, $\beta \in (0;1)$ oraz $(1-\alpha-\beta) \in (0;1)$ są elastycznościami Y względem L, H_Y oraz $x(i)$.

Oznaczając przez $\bar{x} = x(i)$, dla każdego $i \in (0; A)$, przeciętne dobro kapitałowe funkcję produkcji (19) można zapisać następująco:

$$Y = (H_Y)^\beta L^\alpha \int_0^A [x(i)]^{1-\alpha-\beta} di = (H_Y)^\beta L^\alpha (\bar{x})^{1-\alpha-\beta} \int_0^A di = (H_Y)^\beta L^\alpha (\bar{x})^{1-\alpha-\beta} . \tag{20}$$

IV. Łączny zasób kapitału rzeczowego K w gospodarce jest sumą dóbr kapitałowych $x(i)$, co implikuje zależności:

$$K = \int_0^A x(i)di = \bar{x}\int_0^A di = A\bar{x} \;\Rightarrow\; \bar{x} = K / A\,. \tag{21}$$

V. Przyrost kapitału rzeczowego $\dot{K}$ jest równicą między produkcją Y a konsumpcją C (dla uproszczenia rozważań w modelu wzrostu Romera pomija się deprecjację kapitału δK). stąd oraz z równań (20–21) wynika, że:

$$\dot{K} = (H_Y A)^{\beta}(LA)^{\alpha} K^{1-\alpha-\beta} - C\,. \tag{22}$$

VI. Liczba pracujących nie ulega zmianom w czasie i w każdym momencie $t \geq 0$ wynosi $L>0$.

VII. Celem działania typowego podmiotu (konsumenta) gospodarce Romera jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji postaci:

$$\int_0^{+\infty} \frac{[C(t)]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt\,, \tag{23}$$

gdzie parametry $\sigma \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ oraz $\rho>0$ interpretuje się ekonomicznie tak, jak ma to miejsce w modelu wzrostu Lucasa.

Z równań (17–22) otrzymuje się równania ruchu modelu wzrostu Romera postaci:

$$\left.\begin{aligned} \dot{A} &= \kappa H_A A \\ \dot{K} &= A^{\alpha+\beta}(H - H_A)^{\beta} L^{\alpha} K^{1-\alpha-\beta} - C \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Problem wyznaczenia równowagi gospodarki Romera sprowadza się do maksymalizacji całki preferencji (23) przy ograniczeniu układem równań różniczkowych (24). Posługując się zasadą maksimum Pontriagina można pokazać (por. Chiang [1992, s. 272–274] lub Tokarski [2009b, rozdział 10]), że rozwiązaniem owego problemu w warunkach wzrostu równomiernego (przy $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K = \dot{C}/C = \dot{A}/A = \kappa H_A$) jest zasób kapitału ludzkiego kierowany do sfery kreacji wiedzy naukowo-technicznej dany wzorem:

$$H_A = \frac{\kappa(\alpha+\beta)H - \beta\rho}{\kappa(\beta\sigma + \alpha)} \tag{25a}$$

oraz stopy wzrostu gospodarczego postaci:

$$\dot{Y}/Y = \dot{K}/K = \dot{C}/C = \dot{A}/A = \frac{\kappa(\alpha+\beta)H - \beta\rho}{\beta\sigma+\alpha}. \tag{25b}$$

Z równań (25ab) wynika, że (przy dodatkowym warunku $\kappa(\alpha+\beta)H > \beta\rho$) w modelu wzrostu gospodarczego Romera zarówno wielkość kapitału ludzkiego kierowanego do działalności naukowo-technicznej, jak i stopy wzrostu podstawowych, wyróżnionych w tym modelu, zmiennych makroekonomicznych, będą tym wyższe, im wyższy jest łączny zasób kapitału ludzkiego (H) oraz im wyższy jest egzogeniczny współczynnik efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze naukowo-technicznej (czyli κ). Co więcej, długookresowe stopy wzrostu gospodarczego $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K = \dot{C}/C = \dot{A}/A$ (podobnie jak ma to miejsce w modelu Lucasa) powinny być również tym wyższe, im bardziej konsumenci w gospodarce będą przedkładali konsumpcję przyszłą nad konsumpcją bieżącą (tj. im niższa będzie stopa dyskontowa ρ oraz im wyższa będzie międzyokresowa substytucja konsumpcji $1/\sigma$).

Ponieważ zasób kapitału ludzkiego oraz jego podział na kapitał ludzki wykorzystywany w sferze produkcji dóbr i usług oraz akumulacja wiedzy zasadniczo determinują podstawowe stopy wzrostu w modelu Romera, określone przez równanie (25b), zatem można się spodziewać, że gospodarki o względnie małym zasobie kapitału będą uzyskiwały stosunkowo niskie stopy wzrostu gospodarczego. Warto jednak zauważyć, iż do wniosku tego należy, szczególnie na gruncie modelu wzrostu endogenicznego Romera, podchodzić bardzo ostrożnie, gdyż w modelu tym zakłada się, że zasób kapitału ludzkiego jest stały w czasie (od dziś aż do nieskończoności).

Kolejnym modelem optymalnego sterowania, nawiązującym do modeli wzrostu endogenicznego, jest model optymalnego sterowania oparty na N-kapitałowym modelu wzrostu Nonnemana-Vanhoudta (por. Tokarski [2007] lub Dykas, Tokarski [2010]). W modelu tym czyni się następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie:

I. Proces produkcyjny opisuje potęgowa funkcja produkcji dana wzorem:

$$Y = \prod_{i=1}^{N} K_i^{\alpha_i} E^{\Theta},$$

gdzie Y, K_i oraz $E \equiv AL$ interpretuje się ekonomicznie tak, jak w przypadku funkcji produkcji w oryginalnym modelu Nonnemana-Vanhoudta. $\alpha_i \in (0;1)$ oraz $\Theta \in (0;1)$ oznaczają – odpowiednio – elastyczności strumienia produktu Y względem nakładów kapitału K_i oraz jednostek efektywnej pracy E (przyjmuje się tu także, że $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \in (0;1)$). Ze specyfikacji powyższej funkcji produkcji wynika, że jest ona jednorodna stopnia $\upsilon = \Theta + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i > 0$. Płynie stąd wniosek, że jeśli stopień jednorodności υ będzie mniejszy (większy) od jedności, to funkcja ta charakteryzować się będzie malejącymi (rosnącymi) efektami skali. Natomiast w przypadku, w którym $\upsilon = 1$ wystąpią (charakterystyczne dla neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego) stałe efekty skali.

II. Przyrosty każdego z zasobów kapitału $\dot{K}_i$ opisują następujące równania różniczkowe:

$$\forall i = 1,2,...,N \qquad \dot{K}_i = s_i Y - \delta_i K_i ,$$

gdzie s_i oraz δ_i interpretuje się tak, jak w przypadku związku (9).

III. Jednostki efektywnej pracy E rosną według stopy wzrostu $\dot{E}/E = g + n$ będącej sumą stopy egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda $g > 0$ i stopy wzrostu liczby pracujących $n > 0$.

IV. Konsumpcja C stanowi różnicę pomiędzy produkcją Y a sumą inwestycji $\sum_{i=1}^{N} s_i Y$, czyli:

$$C = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} s_i\right) Y.$$

V. Celem działania typowego konsumenta, podobnie jak w modelach wzrostu endogenicznego Lucasa i Romera, jest maksymalizacja sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji owego konsumenta w nieskończonym horyzoncie czasowym. Sumę tę opisuje całka niewłaściwa (11) jak w modelu Lucasa.

Założenia I–V analizowanego tu modelu wzrostu gospodarczego można sprowadzić do następującego zadania sterowania optymalnego Pontriagina (por. Tokarski [2007, s. 3–6]):

$$\left.\begin{array}{l}
\max\limits_{s_1,s_2,\ldots,s_N}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\left[\left(1-\sum_{i=1}^{N}s_i\right)y\right]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho t}dt\\
\text{przy}\quad\text{warunkach:}\\
\forall i=1,2,\ldots,N\quad \dot{k}_i=s_iy-(\delta_i+n)k_i\\
y=A_0^{\Theta}L_0^{\Theta+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-1}e^{\Theta g+\left(\Theta+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-1\right)nt}\prod\limits_{i=1}^{N}k_i^{\alpha_i}\\
\forall i=1,2,\ldots,N\ \ k_i(0)=k_i^0>0
\end{array}\right\}, \tag{26}$$

gdzie: y to wydajność pracy, k_i (dla i=1,2,…, N) oznacza zasób i-tego kapitału na pracującego, k_i^0 – zasób ów w momencie t = 0, natomiast A_0 > 0 i L_0 > 0 są zasobami wiedzy A i pracy L w owym momencie.

Zadanie sterowania optymalnego (26) posiada niebrzegowe rozwiązanie przy stałych w czasie stopach inwestycji s_1, s_2, …, s_N. Wówczas stopę wzrostu wydajności pracy $\dot{y}/y$ oraz kolejnych zasobów kapitału $\dot{k}_i/k_i$ określa równanie (por. Tokarski [2007, s. 6–11]):

$$\dot{y}/y=\dot{k}_1/k_1=\dot{k}_2/k_2=\ldots=\dot{k}_N/k_N=\frac{\Theta g+\left(\Theta+\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i-1\right)n}{1-\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i}. \tag{27}$$

Z równania (27) wyciągnąć można m.in. następujące wnioski, dotyczące długookresowych stóp wzrostu w modelu optymalnego sterowania typu Nonnemana-Vanhoudta (por. też Tokarski [2007, s. 11–12]):

- Stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych na pracującego zależne są od stopy harrodiańskiego postępu technicznego g, stopy wzrostu liczby pracujących n, elastyczności Θ oraz elastyczności α_1, α_2, …, α_N makroekonomicznej funkcji produkcji względem jednostek efektywnej pracy E oraz nakładów kolejnych zasobów kapitału K_1, K_2, …, K_N.
- Im wyższa jest stopa postępu technicznego w sensie Harroda, tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu y oraz k_1, k_2, …, k_N.
- Jeśli makroekonomiczna funkcja produkcji charakteryzuje się malejącymi (rosnącymi) efektami skali, czyli wówczas, gdy $\Theta+\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i<1$ $\left(\Theta+\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i>1\right)$, to wysokiej stopie wzrostu liczby pracujących n towarzyszą niskie (wysokie) stopy

wzrostu wydajności pracy i kolejnych zasobów kapitału na pracującego. Natomiast w przypadku, w którym występują stałe efekty skali, a więc przy $\Theta+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1$, stopy wzrostu $\dot{y}/y=\dot{k}_1/k_1=\dot{k}_2/k_2=\ldots=\dot{k}_N/k_N$ są niezależne od stopy wzrostu liczby pracujących i – podobnie jak w neoklasycznych modelach Solowa, Mankiwa-Romera-Weila oraz Nonnemana-Vanhoudta – równe są stopie egzogenicznego postępu technicznego *g*.

Co więcej, z niebrzegowego rozwiązania zadania sterowania optymalnego (26) wynika też, iż optymalne stopy inwestycji określają równania (por. Tokarski [2007, s. 15]):

$$\forall i=1,2,\ldots,N \quad s_i=\frac{\alpha_i\Theta(g+n)}{(\rho+\delta_i)\left(1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)+\sigma\left[\Theta g+\left(\Theta+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j-1\right)n\right]}. \tag{28}$$

Z zależności (28) wynika co następuje:

- Optymalne stopy inwestycji zależne są m.in. od preferencji typowego konsumenta co do alokacji konsumpcji w czasie, które opisane są przez stopę dyskontową ρ oraz odwrotność międzyokresowej substytucji konsumpcji σ owego konsumenta.
- Co więcej, im niższe wartości przyjmuje ρ, tym wyższe są optymalne stopy inwestycji.
- Natomiast kierunek oddziaływania σ na owe stopy zależny jest od stopnia jednorodności makroekonomicznej funkcji produkcji. Jeśli stopień ów będzie wyższy (niższy) od wyrażenia $\frac{\Theta g}{n}-1$, to wysokiej wartości σ odpowiadać będą wysokie (niskie) optymalne stopy inwestycji s_i.

5. Rozszerzenie endogenicznych modeli wzrostu gospodarczego, modele wzrostu semi-endogenicznego

W punkcie poprzednim analizowano endogeniczne modele wzrostu gospodarczego, natomiast w kolejnym punkcie przedstawione zostaną rozszerzenia owych modeli.

W prezentowanych modelach semi-endogenicznych obok maksymalizacji użyteczności typowego konsumenta oraz wyznaczenia optymalnej stopy wzrostu konsumpcji (równej stopie wzrostu produkcji) maksymalizuje się również dochód podmiotu monopolistycznego, który wytwarza czynniki niezbędne w procesie produkcyjnym. W punktach 5.4 oraz 5.5 przedstawiona jest optymalna (w sensie Pareto) alokacja zasobów w rozważanej gospodarce oraz efekty zewnętrzne związane z zaangażowaniem kapitału ludzkiego w sektorze nowych technologii.

5.1. Założenia modelu

I. Podobnie jak w modelach wzrostu endogenicznego typowy konsument, maksymalizuje sumę zdyskontowanej użyteczności konsumpcji w nieskończonym horyzoncie czasowym. Owa suma maksymalizowana jest poprzez następującą całkę preferencji:

$$\int_0^{+\infty} \frac{C(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} e^{-\rho \cdot t} dt \tag{29}$$

W rozważanym modelu zakładamy brak wzrostu populacji, natomiast całkowity zasób kapitału ludzkiego generowany przez rynek wynosi L.

II. Strumień produktu *Y* opisuje funkcja produkcji postaci:

$$Y = \frac{1}{1-\beta} L^{\beta} \int_0^{A_t} x(v,t)^{1-\beta} dv \tag{30}$$

gdzie $L > 0$ jest zagregowanym nakładem kapitału ludzkiego, A_t oznacza ilość czynników produkcji dostępnych w okresie *t*, $x(v,t)$ to całkowita ilość czynników produkcji *v* $(v \in (0, A_t))$ użytych w procesie produkcyjnym w okresie *t*.

Funkcję produkcji (30) można również zapisać w następującej postaci:

$$Y = \frac{1}{1-\beta} L^{\beta} \overline{X}^{1-\beta} \tag{31}$$

gdzie:

$$\overline{X} = \left(\int_0^{A_t} x(v,t)^{\frac{\varepsilon_\beta - 1}{\varepsilon_\beta}} dv \right)^{\frac{\varepsilon_\beta - 1}{\varepsilon_\beta}},$$

przy czym ε_β to elastyczność substytucji pomiędzy nakładami dóbr kapitałowych. Funkcja produkcji (30) zapisana za pomocą związku (31) uwydatnia stałe efekty skali.

III. Normalizując cenę dóbr finalnych w każdym okresie do jedności, otrzymujemy następujące ograniczenie zasobów w gospodarce:

$$C(t) + X(t) + Z(t) \leq Y(t) \tag{32}$$

gdzie $X(t)$ to nakłady na czynniki produkcji (nakłady inwestycyjne), zaś $Z(t)$ to wydatki poniesione na nowe technologie w okresie t. Zakładamy też, że każda jednostka czynnika produkcji może być wytwarzana z kosztem krańcowym produkcji równym $\psi \in (0,1)$.

IV. Możliwości innowacyjne gospodarki opisane są przez związek:

$$\dot{A}_t = \eta \cdot Z(t) \tag{33}$$

gdzie $\eta > 0$ oraz początkowy stan zawansowania technologicznego wynosi: $A(0) > 0$. Równanie (33) implikuje, że większe nakłady na nowe technologie prowadzą do tworzenia nowych czynników produkcji.

V. Podmioty oferujące czynniki produkcji v na rynku ustalają ich cenę na poziomie $p_x(v,t)$ taką, aby maksymalizowała ich dochód. Zakładając, iż czynniki produkcji ulegają całkowitej deprecjacji podczas ich użytkowania $p_x(v,t)$ można interpretować jako koszt ich użytkowania.

Popyt na czynniki produkcji v otrzymujemy poprzez maksymalizację zagregowanych zysków netto w sektorze dóbr finalnych. Problem maksymalizacji zysków można zapisać jako:

$$\max_{x(v,t)} \frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{A_t} x(v,t)^{1-\beta} dv\right) \cdot L^\beta - \int_0^{A_t} p_x(v,t)x(v,t)dv - w(t)L \tag{34}$$

Zależność (34) opisuje maksymalizację różnicy pomiędzy dochodem uzyskanym z produkcji a kosztem całkowitym produkcji (na który składa się koszt użytkowania czynników produkcji oraz koszt zaangażowania kapitału ludzkiego).

Pierwszym warunkiem maksymalizacji zysku jest określenie popytu na czynniki produkcji; przyjmuje on następującą formę:

$$x(v,t) = p_x(v,t)^{-\varepsilon_\beta} L \tag{35}$$

gdzie $\varepsilon_\beta \equiv \frac{1}{\beta}$ to elastyczność popytu na czynniki produkcji. Popyt dany równaniem (35) zależy od kosztu użytkowania czynników produkcji oraz podaży pracy.

Drugim warunkiem maksymalizacji zysku jest określenie zaktualizowanego dochodu monopolisty wytwarzającego czynniki produkcji v, jako:

$$V(v,t) = \int_t^\infty \pi(v,s) \cdot e^{-\int_t^s r(j)dj} ds \tag{36}$$

gdzie:

$$\pi(v,t) = p_x(v,t) \cdot x(v,t) - \psi \cdot x(v,t)$$

oznacza dochody monopolisty wytwarzającego czynniki produkcji v w czasie t, $r(t)$ to rynkowa stopa procentowa dla okresu t. Zakładając, że równanie (36) jest różniczkowalne dla każdego okresu t, problem maksymalizacji sprowadza się do następującego związku:

$$r(t) \cdot V(v,t) - \dot{V}(v,t) = \pi(v,t). \tag{37}$$

5.2. Charakterystyka równowagi

Alokacja zasobów w tej gospodarce jest zdefiniowana przez następujące zmienne: ścieżkę czasową dla poziomu konsumpcji $(C(t))_{t=0}^\infty$, łącznych nakładów na czynniki produkcji $(X(t))_{t=0}^\infty$, łącznych wydatków na nowe technologie $(Z(t))_{t=0}^\infty$, ceny i ilości czynników produkcji $(p_x(v,t); x(v,t))_{t=0}^\infty$, stopy procentowej $(r(t))_{t=0}^\infty$ oraz stopy wynagrodzeń $(w(t))_{t=0}^\infty$.

Równowaga w opisywanym modelu występuje wówczas, gdy ścieżki czasowe $(p_x(v,t); x(v,t))_{t=0}^\infty$ maksymalizują zaktualizowaną wartość dochodów monopolistów działających na rynku oraz $(C(t), X(t), Z(t))_{t=0}^\infty$ maksymalizują użyteczność typowego konsumenta. Ze związku (7) wynika, że rozwiązanie problemu maksymalizacji dla każdego $v \in [0, A_t]$ sprowadza się do tego, iż cena czynników produkcji jest taka sama dla każdego okresu. Monopolista ustala cenę na takim poziomie aby przewyższała jego koszt krańcowy ψ, co oznacza, że można założyć, iż dana jest ona zależnością:

$$\forall v \in [0, A_t], t \in [0, +\infty) \qquad p_x(v,t) = \frac{\psi}{1-\beta}.$$

Normalizując koszt krańcowy do $\psi \equiv 1-\beta$ okazuje się, że cena czynników produkcji równa jest jedności. Maksymalizacja zysków monopolisty implikuje również, że każdy monopolista wytwarza tę samą ilość czynników produkcji równą:

$$\forall v \in [0, A_t], t \in [0, +\infty) \qquad x(v,t) = L \tag{38}$$

Zatem zysk monopolisty można zapiać jako:

$$\forall v \in [0, A_t], t \in [0, +\infty) \qquad \pi(v,t) = \beta \cdot L \tag{39}$$

Z równania (39) wynika, że każdy monopolista generuje taki sam zysk w każdym okresie.

Z równań (30) oraz (35) płynie wniosek, że funkcję produkcji można zapisać jako:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} A_t \cdot L \tag{40}$$

Z równania (40) wynika, że chociaż zagregowana funkcja produkcji generuje stałe efekty skali z punktu widzenia końcowych odbiorców czynników produkcji (dla których A_t jest zmienną egzogeniczną), to w odniesieniu do całej gospodarki dochody rosną wraz ze wzrostem skali produkcji.

Popyt na pracę w sektorze dóbr finalnych wynika z pierwszego warunku maksymalizacji (34), co implikuje, że płace równe są:

$$w(t) = \frac{\beta}{1-\beta} \cdot A_t \tag{41}$$

Zakładając następujące związki:

$$\eta V(v,t) \le 1, Z(v,t) \ge 0 \qquad \wedge (\eta V(v,t) - 1) Z(v,t) = 0 \tag{42}$$

otrzymujemy tak zwane warunki „wejścia” na rynek.

Z powyższych rozważań wynika, że każdy z A_t monopolistów dostarcza całkowitą ilość czynników produkcji daną przez związek (10), stąd dochodzi się do całkowitych nakładów na czynniki produkcji:

$$X(t) = (1-\beta)A_t \cdot L \tag{43}$$

Maksymalizacja użyteczności typowego konsumenta sprowadza się do równania Eulera dla stopy wzrostu konsumpcji:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}\left(r(t) - \rho\right) \tag{44}$$

oraz z warunku transwersalności:

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\int_0^t r(s)ds} \cdot \int_0^{A_t} V(v,t)dv \right) = 0 \tag{45}$$

który implikuje, że całkowity zysk $\int_0^{A_t} V(v,t)dv$ rośnie nie szybciej niż stopa dyskonta.

Z powyższych rozważań wynika, że równowaga może być zdefiniowana jako:

- ścieżka czasowa konsumpcji, nakładów na nowe technologie i całkowitej ilości dostępnych czynników produkcji, które spełniają związki: (32), (36), (42), (44) i (45),
- ścieżka czasowa dla cen i ilości $\left[p_x(v,t), x(v,t)\right]_{v\in A_t}^{\infty}$ czynników produkcji, która spełnia równania (38) i (39),
- ścieżka czasowa rynkowej stopy procentowej oraz płac $\left[r(t), w(t)\right]_{t=0}^{\infty}$, która spełnia równania (41) i (45).

Zrównoważona ścieżka wzrostu (stabilny punkt równowagi), występuje wówczas, gdy konsumpcja *C(t)* i produkcja *Y(t)* rosną w stałym tempie. Równanie (40) implikuje zaś, że A_t również rośnie w stałym tempie.

5.3. Zrównoważona ścieżka wzrostu

Punkt równowagi jest osiągany wtedy, gdy konsumpcja *C(t)* rośnie według stałej stopy g_C^*. Ze związku (44) wynika, iż rynkowa stopa procentowa musi również rosnąć w stałym tempie, stąd można założyć, że $r(t) = r^*$ dla każdego *t*. Z równania (39) oraz z założenia, że stopa procentowa jest stała, związek (37) implikuje że $\dot{V}(t) = 0,$ zaś stąd i z równania (8) otrzymujemy:

$$V^{*} = \frac{\beta \cdot L}{r^{*}} \tag{46}$$

Równanie (46) oznacza, że zyski monopolistów $\beta \cdot L$ w punkcie równowagi są zaktualizowane stałą stopą dyskonta równą r^{*}.

Z warunków „wejścia” (42) wynika, że zachodzi następująca zależność: $r^{*} = \eta\beta L$.

Natomiast równanie konsumpcji (44) implikuje, że stopa wzrostu konsumpcji w punkcie równowagi dana jest przez związek:

$$g_{C}^{*} = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}\left(r^{*} - \rho\right) \tag{47}$$

Ponadto bieżący Hamiltonian dla problemu maksymalizacji użyteczności typowego konsumenta jest wklęsły, a stąd i z warunku transwersalności można scharakteryzować optymalny plan konsumpcji dla typowego konsumenta.

W punkcie równowagi konsumpcja nie może rosnąć w innym tempie, niż łączna produkcja, stąd długookresowa stopa wzrostu w rozważanej gospodarce dana jest przez równanie:

$$g^{*} = \frac{1}{\theta}\left(\eta\beta L - \rho\right) \tag{48}$$

Załóżmy, że zachodzą następujące ograniczenia na stopę preferencji typowego konsumenta:

$$\eta\beta L > \rho \wedge (1 - \theta)\eta\beta L < \rho \,. \tag{49}$$

Pierwszy warunek implikuje, że $g^{*} > 0$, drugi zaś, że typowy konsument charakteryzuje się skończoną użytecznością. Przy warunkach (49) istnieje punkt równowagi w którym produkcja rośnie według stałej stopy wzrostu $g^{*} > 0$.

5.3.1. Optymalna alokacja w sensie Pareto

W prezentowanym modelu konkurencja monopolistyczna implikuje, że występująca równowaga nie zawsze jest optymalna w sensie Pareto. Aby zestawić równowagę i optymalną alokację w sensie Pareto można zacząć od problemu optymalnego wzrostu. Optymalna ścieżka wzrostu jest rozwiązaniem zagadnienia maksymalizacji użyteczności typowego konsumenta (29), ograniczenia zasobów w gospodarce (32) oraz możliwości innowacyjnych (33). Owe ograniczenie zasobów może być zapisane jako:

$$C(t)+Z(t)\leq\frac{1}{1-\beta}\left(\int_0^{A_t}x(v,t)^{1-\beta}dv\right)L^{\beta}-\int_0^{A_t}\psi\cdot x(v,t)dv \tag{50}$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie powyższej nierówności to zdyskontowany zysk netto. Zagadnienia optymalnego wzrostu można rozwiązać w dwóch etapach. Pierwszy etap obejmuje charakterystykę optymalnej alokacji, natomiast drugi- charakterystykę optymalnej ścieżki wzrostu konsumpcji *C(t)* oraz ścieżki wzrostu dostępnych czynników produkcji A_t. Pierwszy krok jest równoważny z maksymalizacją prawej strony nierówności (50), która prowadzi do związku:

$$x(v,t)=(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}L.$$

Podstawiając tę zależność do równania (30) dochodzi się do optymalnej alokacji w sensie Pareto:

$$Y(t)=(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}A_tL.$$

Stąd produkt netto $\overline{Y}(t)$ może być zapisany jako:

$$\overline{Y}(t)=(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}A_tL-\int_0^{A_t}\psi\cdot x(v,t)dv=(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta\cdot A_tL.$$

Następnym etapem charakterystyki optymalnej ścieżki wzrostu jest maksymalizacja preferencji typowego konsumenta:

$$\max\int_0^{\infty}\frac{C(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\rho\cdot t}dt$$

przy warunku:

$$\dot{A}_t=\eta\left((1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta A_tL-C(t)\right),$$

gdzie A_t to zmienna endogeniczna, natomiast *C(t)* to zmienna egzogeniczna. Bieżący hamiltonian dla powyższego problemu dany jest równaniem:

$$\hat{H}(A_t, C, \mu) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} + \mu(t)\left(\eta(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta A_t L - \eta C(t)\right).$$

Warunki konieczne istnienia rozwiązania sprowadzają się do następującego układu warunków:

$$\hat{H}_C(A_t, C, \mu) = C(t)^{-\theta} - \eta\mu(t) = 0,$$

$$\hat{H}_{A_t}(A_t, C, \mu) = \eta\mu(t)(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta L = \rho\mu(t) - \dot{\mu}(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\rho\cdot t}\mu(t)A_t\right) = 0.$$

Powyższe równania charakteryzują optymalną ścieżkę wzrostu. Łącząc te warunki otrzymujemy optymalną ścieżkę wzrostu dla konsumpcji:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}\left(\eta(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta L - \rho\right) \tag{51}$$

Optymalna alokacja, tak jak optymalna stopa wzrostu, zależy od stałej stopy konsumpcji, natomiast optymalną stopę wzrostu konsumpcji (51) można porównać do zrównoważonej stopy wzrostu danej przez związek (48). Stąd jeżeli $(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}} > 1$ to optymalna stopa wzrostu jest zawsze większa od stopy zrównoważonego wzrostu (48).

Ponadto przy warunku: $(1-\theta)\eta(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta L < \rho$ począwszy od $A_0 > 0$, optymalna alokacja potęguje stałą stopę wzrostu:

$$g = \frac{1}{\theta}\left(\eta(1-\beta)^{-\frac{1}{\beta}}\beta L - \rho\right),$$

która jest istotnie większa niż stopa równowagi g^* dana przez równanie (48). Intuicyjnie optymalna stopa wzrostu w alokacji Pareto jest wyższa niż zrównoważona stopa wzrostu ponieważ wartość społeczna innowacji jest wyższa, niż wartość ekonomiczna innowacji.

5.3.2. Wzrost z zewnętrznymi efektami wiedzy

W punktach poprzednich wzrost oparty był na możliwościach innowacyjnych gospodarki, w szczególności na ilości czynników produkcji, charakteryzujących się wysoko rozwiniętymi technologiami. Innym podejściem do tego zagadnienia jest skierowanie większego zasobu kapitału ludzkiego do sektora nowych technologii.

Możliwości innowacyjne gospodarki można teraz zapisać następująco:

$$\dot{A}_t = \eta \cdot A_t \cdot L_R(t) \qquad (52),$$

gdzie $L_R(t)$ to alokacja kapitału ludzkiego w sektorze nowych technologii w momencie *t*, wyrażenie A_t to zasób dostępnych technologii w momencie *t*. Stąd większa wartość A_t pociąga za sobą większą produktywność zasobu ludzkiego w sektorze nowych technologii. Zauważmy, że możliwości innowacyjne dane przez (52) są proporcjonalne do zasobu kapitału ludzkiego skierowanego do sektora nowych technologii. Owa proporcjonalność jest źródłem wzrostu endogenicznego w prezentowanym modelu. Powyższe założenia są podobne do założeń w modelu Romera.

Dostępny zasób kapitału ludzkiego w gospodarce w momencie *t* przedstawia się następująco:

$$L_R(t) + L_E(t) \le L(t),$$

gdzie $L_E(t)$ to zasób kapitału ludzkiego w sektorze dóbr finalnych w momencie *t*.

Łączny produkt opisuje funkcja:

$$Y(t) = \frac{1}{1-\beta} A_t L_E(t) \qquad (53)$$

Strumień dochodów monopolisty ze sprzedaży czynników produkcji wynosi:

$$\pi(t) = \beta L_E(t) \qquad (54)$$

Wartość zaktualizowana netto zysku monopolisty opisana jest przez zależność (36).

Równanie (52) implikuje następujący warunek „wejścia" na rynek jako:

$$\eta A_t V(v,t) = w(t) \tag{55}$$

Lewa strona równania (55) dotyczy dochodu z zaangażowania dodatkowej jednostki kapitału ludzkiego w sektorze nowych technologii, natomiast $w(t)$ to strumień kosztów wynikający z zatrudnienia dodatkowego pracownika w sektorze nowych technologii.

Płace opisuje zaś równanie:

$$w(t) = \frac{\beta A_t}{1-\beta}.$$

Ponadto wzrost w punkcie równowagi implikuje również, że rynkowa stopa procentowa musi być na stałym poziomie r^*. Stąd oraz z warunku „wejścia" na rynek wynika, że zachodzi następujące równanie:

$$\eta A_t \frac{\beta L_E(t)}{r^*} = \frac{\beta}{1-\beta} A_t \tag{56}$$

Zatem rynkowa stopa procentowa w punkcie równowagi jest równa:

$$r^* = (1-\beta)\eta L_E^*,$$

gdzie L_E^* jest stałym zasobem kapitału ludzkiego ulokowanym w sektorze dóbr finalnych w punkcie równowagi. Z równania Eulera dla stopy wzrostu konsumpcji (51) otrzymujemy:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta}\left((1-\beta)\eta L_E^* - \rho\right) = g^* \tag{57}$$

Granica możliwości innowacyjnych (52) implikuje, że $\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \eta L_R^* = \eta\left(L - L_E^*\right)$.
Ponieważ tempo wzrostu konsumpcji musi być takie samo, jak tempo postępu

technologicznego w punkcie równowagi, stąd: $g^* = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}$, co implikuje, że poziom zatrudnienia w punkcie równowagi opisany jest przez:

$$L_E^* = \frac{\theta\eta L + \rho}{(1-\beta)\eta + \theta\eta} \tag{58}$$

Rozważając wyżej opisany model gospodarki z efektami zewnętrznymi wiedzy oraz zakładając, że stopa preferencji konsumpcji typowego konsumenta ρ spełnia następującą nierówność :

$$(1-\theta)(1-\beta)\eta L_E^* < \rho < (1-\beta)\eta L_E^* .$$

Otrzymujemy, że począwszy od $A_0 > 0$ istnieje optymalna ścieżka wzrostu, w której technologia, produkcja i konsumpcja rosną według tej samej stopy równej $g^* > 0$ danej przez (57).

6. Podsumowanie

Prowadzone w opracowaniu analizy można podsumować następująco:

- W neoklasycznym modelu wzrostu gospodarczego Solowa istnieje pewien dodatni zasób kapitału rzeczowego na jednostkę efektywnej pracy, przy którym osiągana jest długookresowa równowaga modelu. Z modelu Solowa wynika również, że w długookresowej równowadze wydajność pracy oraz techniczne uzbrojenie pracy rosną według tej samej długookresowej stopy wzrostu (równej stopie postępu technicznego w sensie Harroda). Ponadto wzrost stopy oszczędności/inwestycji prowadzi do tego, iż ścieżki czasowe wydajności pracy oraz technicznego uzbrojenia pracy są wyżej położone. Natomiast wzrost stopy deprecjacji kapitału oraz stopy wzrostu liczby pracujących prowadzą do niżej położonych ścieżek wzrostu gospodarczego.
- Model wzrostu gospodarczego Solowa posłużył również do stworzenia przez Phelpsa tzw. złotej reguły akumulacji kapitału, tj. takiej stopy oszczędności/inwestycji, która prowadzi gospodarkę Solowa na najwyższą długookresową ścieżkę wzrostu konsumpcji na pracującego. Rozważając zaś model wzrostu gospodarczego Solowa z funkcją produkcji typu Coba-Douglasa, złotą regułą akumulacji kapitału jest stopa oszczędności/inwestycji, która równa jest udziałowi nakładów kapitału w produkcji.

- Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila stanowi rozszerzenie modelu wzrostu gospodarczego Solowa (w modelu tym oprócz akumulacji kapitału rozważa się również akumulację kapitału ludzkiego). W modelu tym w długookresowej równowadze stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy oraz stopa wzrostu kapitału ludzkiego na pracującego rosną również według stopy wzrostu stopie harrodiańskiego postępu technicznego. Wyższe stopy inwestycji implikują, iż w długim okresie ścieżki wzrostu wydajności pracy, zasobów kapitału rzeczowego oraz ludzkiego na pracującego przesuwają się na wyżej położone trajektorie. Ponadto wysokie stopy deprecjacji owych kapitałów oraz wysoka stopa liczby pracujących prowadzą do nisko położonych długookresowych ścieżek wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy oraz kapitału ludzkiego na pracującego.
- Kolejnym rozszerzeniem modelu wzrostu gospodarczego Solowa jest model wzrostu Nonnemana-Vanhoudta, w którym analizowana jest skończona liczba N (substytucyjnych względem siebie) zasobów kapitałowych. Z modelu tego płyną wnioski podobne, do tych, które wynikają z modeli Solowa i Mankiwa-Romera-Weila.
- Z modelu wzrostu endogenicznego Lucasa wynika, że im bardziej konsumenci w owej gospodarce preferować będą konsumpcję bieżącą w stosunku do konsumpcji przyszłej, tym niższe stopy wzrostu będą uzyskiwać podstawowe zmienne makroekonomiczne. W modelu wzrostu gospodarczego Lucasa dopuszczalne jest trwałe podniesienie stóp wzrostu gospodarczego. Niemniej jednak trwałe podniesienie długookresowych stóp wzrostu gospodarczego musi być połączone ze zmianą preferencji konsumentów w stosunku do struktury konsumpcji w czasie.
- Kolejnym rozważanym modelem wzrostu endogenicznego jest model Romera. W modelu tym wielkość kapitału ludzkiego skierowanego do działalności naukowo-technicznej oraz stopy wzrostu podstawowych, rozważanych w modelu, zmiennych makroekonomicznych, będą tym wyższe, im wyższy będzie łączny zasób kapitału ludzkiego oraz im wyższy będzie egzogeniczny współczynnik efektywności nakładów kapitału ludzkiego w sferze naukowo-technicznej. Ponadto długookresowe stopy wzrostu gospodarczego są tym wyższe, im bardziej konsumenci w gospodarce przedkładają konsumpcję przyszłą nad konsumpcją bieżącą.
- Z prezentowanego modelu wzrostu semi-endogenicznego wyciągnąć można następujące wnioski. Po pierwsze, równowaga w opisywanym modelu występuje wówczas, gdy zmaksymalizowane są bieżące dochody monopolistów (każdy monopolista ustala wówczas taką cenę, aby przewyższała jego koszt krańcowy) oraz użyteczność konsumpcji typowego konsumenta w gospodarce (prowadzi to do tego iż konsumpcja i produkcja rosną według tej samej stałej stopy wzrostu). Po drugie, optymalna stopa wzrostu, przy alokacji w sensie Pareto, jest wyższa niż stopa wzrostu przy równowadze rozważanego modelu. Po

trzecie, podobnie jak ma to miejsce w modelu wzrostu Romera, zwiększony zasób nowych technologii pociąga za sobą większą produktywność kapitału ludzkiego w sektorze naukowo-technicznym. Ponadto istnieje optymalna ścieżka wzrostu, przy której technologia, produkcja oraz konsumpcja rosną według tej samej stopy wzrostu.

Literatura

Barro R.J., Sala-i-Martin X., [1995], *Economic Growth*, McGraw-Hill Inc., New York etc.
Chiang A.C., [1992], *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill International Editions, New York.
Chiang A.C., [1994], *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa.
Domar E.D., [1962], *Szkice z teorii wzrostu gospodarczego*, PWN, Warszawa.
Dykas P., A. Edigarian, T. Tokarski, [2010], *Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonneman-Vanhoudta*, referat na IV Otwarte Seminarium WIGE UEP, Poznań, maj 2010.
Dykas P., A. Sulima, T. Tokarski, [2008], *Złote reguły akumulacji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa" nr 11–12.
Dykas P., T. Tokarski, [2010], *Równowaga i optymalne sterowanie w N-kapitałowym modelu wzrostu Nonnemana-Vanhoudta*, opracowanie powstałe w ramach projektu KBN nr 4383/B/H03/2009/37 kierowanego przez prof. dr hab. Władysława Welfe z Uniwersytetu Łódzkiego (przesłane do Redakcji „Studiów Prawno-Ekonomicznych").
Harcourt G.C., [1975], *Spory wokół teorii kapitału*, PWE, Warszawa.
Lucas R.E., [1988], *On the Mechanics of Economics Development*, „Journal of Monetary Economics", July.
Lucas R.E., [1990], *Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?*, „American Economic Review", May.
Lucas R.E., [1993], *Making a Miracle*, „Econometrica", March.
Lucas R.E., [2010], *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
Mankiw N.G., D. Romer, Weil D.N., [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", May.
Nonneman W., P. Vanhoudt, [1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics", August.
Phelps E.S., [1961], *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review", September.
Romer P.M., [1986], *Increasing Returns and Long-Run Growth*, „Journal of Political Economy", October.
Romer P.M., [1990], *Endogenous Technological Change*, „Journal of Political Economy", October.
Solow R.M., [1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, "Quarterly Journal of Economics", February.
Solow R.M., [1957], *Technical Change and the Aggregate Production Function*, "Review of Economics and Statistics", August.
Solow R.M., [1979], *Another Possible Source of Wage Stickiness*, „Journal of Macroeconomics", Winter.
Sulima A., [2010], *Równowaga Nonnemana-Vanhoudta z N-kapitałową funkcją produkcji CES*, referat na IV Otwarte Seminarium WIGE UEP, Poznań, maj 2010.
Summers L.H., [1988], *Relative Wages, Efficiency Wages, and Keynesian Unemployment*, „American Economic Review", May.

Tokarski T., [2001], *Dwadzieścia lat renesansu teorii wzrostu gospodarczego. Na ile lepiej rozumiemy jego mechanizm?* w A. Wojtyna, red., *Czy ekonomia nadąża za wyjaśnianiem rzeczywistości?*, VII Kongres Ekonomistów Polskich, tom I, Wydawnictwo PTE-Bellona, Warszawa.

Tokarski T., [2003a], *Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*, „Ekonomista" nr 3.

Tokarski T., [2003b], *On the Long-Run Monetary Policy Rules in the Domar-Solow Type of Economy* w W. Welfe, A. Welfe, red., [2003], *Macromodels 2002. Proceedings of the Twenty Ninth International Conference*, University of Lodz, Łódź.

Tokarski T., [2003c], *Wzrost gospodarczy a rynek pracy w neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego*, „Studia Ekonomiczne" INE-PAN, vol. 38, nr 3.

Tokarski T., [2007], *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa" nr 9.

Tokarski T., [2008], *Efekty skali a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T., [2009a], *The supply – side determinants of economic growth*, [w:] W. Welfe [2009].

Tokarski T., [2009b], *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T., [2011a], *Ekonomia matematyczna. Modele mikroekonomiczne*, PWE, Warszawa.

Tokarski T., [2011b], *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, PWE, Warszawa.

Welfe W., [2000], *Empiryczne modele wzrostu gospodarczego*, Ekonomista nr 4.

Welfe W., [2009], *Knowledge – based Economies. Models and Methods*, Peter Lang Internationaler Verlag der Wissenschaften, Frankfurt am Main etc.

Welfe W., A. Welfe (red.) [2003] *Macromodels 2002. Proceedings of the Twenty Ninth International Conference*, University of Lodz, Łódź.

Wojtyna A., [1996], *Rola państwa we wzroście gospodarczym*, referat prezentowany na konferencji „Współczesne teorie wzrostu gospodarczego", PTE, Warszawa, październik 1996.

Wojtyna A., red., [2001], *Czy ekonomia nadąża z wyjaśnianiem rzeczywistości?*, VII Kongres Ekonomistów Polskich, tom I, Wydawnictwo PTE-Bellona, Warszawa.

Wzrost gospodarczy, restrukturyzacja i bezrobocie w Polsce. Ujęcie teoretyczne i empiryczne [2000], Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Paweł Dykas, *Tomasz Tokarski*

SUPPLY-SIDE FACTORS OF ECONOMIC GROWTH – BASIC THEORETICAL MODELS

Summary

The aim of the present study is to analyze the determinants of long-term supply growth on the basis of some basic theoretical models of growth. The paper examines neoclassical growth models, growth models based on the theory of optimal control by Pontryagin, and models of semi-endogenous growth.