ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 205, 2007

Beata Bugajska-Jaszczołt[*]
Monika Czajkowska[**]

KOORDYNACJA WIEDZY MATEMATYCZNEJ Z ZAGADNIENIAMI MIKROEKONOMII – STAN OBECNY ORAZ PROPOZYCJE ZMIAN (NA PODSTAWIE POJĘCIA CENOWEJ ELASTYCZNOŚCI POPYTU)

1. WAGA PROBLEMU KOORDYNACJI WIEDZY PRZEDMIOTOWEJ MATEMATYKI I MIKROEKONOMII

Problemy dotyczące kształcenia matematycznego na studiach ekonomicznych poruszane są z coraz większą częstotliwością zarówno przez środowiska związane z kształceniem akademickim, jak i potencjalnych pracodawców. Zgłaszane są jakościowo różne potrzeby w tym zakresie. Począwszy od rozwiązań dotyczących pojedynczych zagadnień, czy nawet pojęć (zob. D. Witkowska, 2006; G. Kończak, 2006; M. Szałański, 2006), a skończywszy na ogólnych, wskazujących m.in. konieczność wypracowania koncepcji podręcznika do matematyki dla studentów studiów ekonomicznych, uwzględniającej „nowe" możliwości aplikacji wiedzy matematycznej (zob. G. Treliński, 2006). Na ten stan mają wpływ z jednej strony nowopowstające, dość liczne wyższe szkoły ekonomiczne oraz naturalnie wyłaniająca się szansa dostosowania i skorelowania działań nauczycieli akademickich różnych specjalności, m.in. matematyków i ekonomistów.

Dziś już nikt nie kwestionuje przydatności wiedzy matematycznej w wykształceniu każdego człowieka niezależnie od specyfiki jego działalności. Znane są badania empiryczne (zob. *Raport z badań*, 2002), które jednoznacznie wskazują, iż matematyka, zarówno w opinii wykładowców i studentów kierunków

[*] Dr, Akademia Świętokrzyska w Kielcach.
[**] Dr, Akademia Świętokrzyska w Kielcach.

ekonomicznych, jest przydatna w studiowaniu przedmiotów zawodowych. Doświadczenie w zakresie wypracowania efektywnych strategii tworzenia wiedzy matematycznej ujawnia potrzebę ustalenia oczekiwań nauczycieli przedmiotów ekonomicznych, dla których matematyka jest jedynie narzędziem wykorzystywanym do opisu, badania i interpretowania, słowem modelowania sytuacji pozamatematycznych. Mają oni swoją wizję przydatności wiedzy matematycznej w zakresie studiowania treści ekonomicznych. Wydaje się zatem konieczne, aby ze względu na służebną rolę matematyki w wykształceniu ekonomisty, dążyć do wypracowania takiej strategii, w której nauczanie określonych treści matematycznych wyposaży studenta w umiejętności dostosowane do aktualnych i przyszłych, zawodowych potrzeb.

Problem braku koordynacji miedzy przedmiotami dostrzega i analizuje A. Pardała (2006, s. 55) mówiąc wprost, że: „*nie wszyscy matematycy starają się zagłębić w kwestie ekonomiczne i wskazywać studentom interpretacje pojęć matematycznych w sytuacjach ekonomicznych – i na odwrót – wykładowcy przedmiotów zawodowych niechętnie wykorzystują matematykę analizując zagadnienia ekonomiczne*".

Unifikacja programów nauczania na kierunkach ekonomicznych wymaga szczegółowej, drobiazgowej wręcz analizy stanu obecnego, tak aby ujawnić wszelkie obszary nie do końca jeszcze dobrze zorganizowanej współpracy nauczycieli przedmiotów ilościowych oraz ekonomicznych. Wtedy możliwe będzie wypracowanie (w toku dalszych poszerzonych badań) konkretnych rozwiązań w zakresie sygnalizowanej korelacji.

W niniejszym artykule skoncentrujemy się na ujawnieniu i scharakteryzowaniu jakościowych różnic w podejściu do tworzenia wiedzy w zakresie matematyki i mikroekonomii. Obiektem naszych badań uczyniłyśmy pojęcie elastyczności funkcji, z którym studenci kierunku ekonomia zapoznają się zarówno na matematyce jak i mikroekonomii. Będziemy przyglądać się jak to pojęcie jest kształtowane w podręcznikach do matematyki i mikroekonomii kierowanych do studentów studiów ekonomicznych, analizując przy tym zabiegi stosowane przez autorów, które ukierunkowane są na świadome odwoływanie studenta do dotychczasowych doświadczeń, czy to z matematyki, czy mikroekonomii. W szczególności będzie nas interesować: sposób tworzenia i definiowania pojęcia (konieczna wiedza wstępna, podejście formalne, algorytmiczne, czy intuicyjne), używany język (dobór terminologii, symboliki), punkty rozbieżności (i zbieżności) między ujęciami tego pojęcia w naukach matematycznych i ekonomicznych.

2. STANDARDY I PROGRAMY NAUCZANIA MATEMATYKI I MIKROEKONOMII DLA KIERUNKU EKONOMIA

Obowiązujące standardy dla kierunku ekonomia (*Rozporządzenie*, 2002) dość lakonicznie informują o sylwetce absolwenta, nie precyzując dokładnie oczekiwanych umiejętności przyszłego ekonomisty. W zakresie studiów I stopnia mówi się o znajomości informatyki i rozległej wiedzy ekonomicznej, wyspecjalizowaniu w dziedzinie zastosowań ekonomii i przygotowaniu do pracy w instytucjach i organizacjach gospodarczych oraz administracji gospodarczej na stanowiskach szczebla operacyjnego. Studia II stopnia mają przygotować do pracy w tychże instytucjach na stanowiskach kierowniczych oraz w administracji centralnej.

Matematyka i mikroekonomia należą do grupy przedmiotów podstawowych. Standardy wskazują treści, ale nie precyzują w jakim ciągu powinny się one pojawiać, jak mają być wprowadzane i realizowane, jakie mają być postulowane osiągnięcia studenta. Ten dokument nie daje też odpowiedzi na temat korelacji fundamentalnych zagadnień w tych przedmiotach. Z założenia student ekonomii nie będzie matematyki tworzyć i rozwijać, ale powinien wykorzystywać jej narzędzia i modele do rozwiązywania problemów ekonomicznych. Wydaje się zatem konieczne, aby na zajęciach z matematyki student ekonomii nabył umiejętności badania, modelowania i matematyzowania sytuacji ekonomicznych, stosowania matematyki do rozwiązywania problemów ekonomicznych, a także dostrzegania i wykorzystywania analogii.

Standardy stanowią jedynie wstępną podstawę opracowania autorskich programów nauczania. Zwykle ich struktura obejmuje informacje dotyczące celów nauczania, doboru treści do ich realizacji, wymagań stawianych studentom w zakresie ich opanowania oraz form sprawdzania tej wiedzy i umiejętności.

Warto więc przyjrzeć się niektórym dostępnym programom z matematyki oraz mikroekonomii, często jawnie ustalającym „punkty" wspólne tworzonych teorii[1]. Programy nauczania realizowane w różnych uczelniach odzwierciedlają subiektywnie widzianą potrzebę ustalania kolejności pojawiania się pojęć oraz elementów wykorzystywanych do nadbudowywania jednych pojęć nad drugimi, a także wykorzystywania tej wiedzy w innych przedmiotach.

3. WARUNKI UNIFIKACJI PROGRAMÓW NAUCZANIA – STAN OBECNY

Istotne znaczenie dla opanowania wiedzy akademickiej przez studentów I roku jest przygotowanie merytoryczne w różnych typach szkół średnich. Ich absolwenci rozpoczynają studia często ze znajomością pojęć co najwyżej na

[1] Zob. np.: http://umoodle.wseia.edu.pl

poziomie podstawowym (m.in. nie znają pojęć: granicy, pochodnej funkcji). Zwykle mają ubogie kompetencje w zakresie czytania tekstu matematycznego, a pojawiająca się nowa forma zdobywania wiedzy – wykład, jest dla wielu z nich, szczególnie w początkowym momencie studiowania, poważną barierą. Trzeba wówczas uwzględnić i wypełnić tzw. lukę edukacyjną pomiędzy poziomem średnim i wyższym w kształceniu matematycznym. Trudno liczyć na samodokształcanie studentów, gdyż takie nawyki nie są kształtowane w szkole średniej.

W praktyce, bardzo często zajęcia z matematyki i mikroekonomii odbywają się równolegle na I roku studiów. Jak słusznie zauważa M. Dąbrowa (2006), istnieje więc sytuacja sprzyjająca skoordynowaniu tych przedmiotów oraz koncepcji ich nauczania. Wskazane jest, aby elementy wiedzy matematycznej i ekonomicznej wzajemnie się uzupełniały i wspomagały. Naturalnym wówczas jest odwoływanie się nauczycieli przedmiotów ekonomicznych do wiedzy i umiejętności matematycznych studentów.

Analiza autorskich programów nauczania, podręczników, a także wieloletnie doświadczenie w pracy ze studentami kierunków ekonomicznych w ramach ćwiczeń z matematyki pokazuje, że jednak w przypadku pojęcia cenowej elastyczności popytu wielokrotnie nie można mówić ani o skoordynowaniu, ani o skorelowaniu matematyki i mikroekonomii. Na mikroekonomii pojęciu elastyczności funkcji poświęcone są zazwyczaj początkowe wykłady. W tym czasie, na zajęciach z matematyki, studenci poznają podstawy matematyki (elementy logiki matematycznej, rachunek kwantyfikatorów, elementy teorii mnogości) i wybrane elementy algebry liniowej. Dopiero dalsza część wykładów obejmuje analizę matematyczną, w tym zagadnienia związane z elastycznością funkcji (zob. A. Smoluk, 2002).

4. CENOWA ELASTYCZNOŚĆ FUNKCJI I JEJ KONCEPCJE PODRĘCZNIKOWE

4.1. Cenowa elastyczność popytu w podręcznikach do matematyki

Badania wskazują, że język podręczników do matematyki, przeznaczonych dla ekonomistów i proponowany w nich sposób tworzenia pojęć matematycznych (zob. B. Bugajska – Jaszczołt, D. Drygała, 2006) są identyczne jak w tych, przeznaczonych dla studentów matematyki. Wydaje się to sprzeczne z naturalnymi oczekiwaniami zarówno nauczanych, jak i nauczających na studiach ekonomicznych. Poziom ścisłości podręczników często przekracza możliwości przeciętnego absolwenta szkoły średniej, a przykłady tam proponowane, parafrazując słowa A. Ostoi-Ostaszewskiego (1996), „*zbyt daleko odbiegają od zastosowań*".

Przyjrzyjmy się dokładniej sytuacjom podręcznikowym, w których pojęcie elastyczności występuje po raz pierwszy. W większości analizowanych książek do nauki matematyki pojawia się ono w kontekście rozważań dotyczących pochodnej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Zwykle po formalnym wprowadzeniu pojęcia pochodnej funkcji w punkcie, jako granicy ilorazu różnicowego, omawia się zastosowania w różnych, zarówno teoretycznych, jak i praktycznych sytuacjach, m.in. do skonstruowania stycznej do krzywej, a także do analizy i interpretacji wielkości krańcowych oraz elastyczności funkcji. Pochodna funkcji jako miara szybkości zmian pewnych wielkości ma pomóc studentowi w studiowaniu zagadnień ekonomicznych, m.in. elastyczności funkcji.

Elastyczność funkcji f w punkcie x definiowana jest jako:

- granica $E_x f(x) = \lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)}\right]$ (A. Matłoka, 1996, s. 100),
- granica $E(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$ (lub $E(f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Gamma y}{\Gamma x}$), przy założeniu, że granica ta istnieje i jest skończona (M. Lassak, 2000, s.65),
- wyrażenie $E_x f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$, bądź liczba $E_x f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$, przy założeniu różniczkowalności funkcji f (W. Dubnicki i in., 1999, s.133),
- iloraz wartości krańcowej funkcji f oraz wartości średniej funkcji f i wypowiadana w języku symbolicznym $E_x f(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}$ lub naturalnym „*elastyczność funkcji różniczkowalnej jest to stosunek krańcowej wartości do wartości średniej*" (J. Piszczała, 1998, s. 82),
- wartość liczbowa wyznaczana ze wzoru $E(c) = -\frac{d'(c)}{d(c)}c$ (T. Bednarski, 2004, s. 118),
- stosunek $\frac{\delta y}{\delta x}$, a dokładnie $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, opatrzony stosownym komentarzem odautorskim „*Wykonując odpowiednie rachunki, otrzymujemy:* $Ef(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \approx \frac{\delta y}{\delta x}$. *Przyjmując* $\delta x = 1$, *czyli jednoprocentowe zwiększenie argumentu, otrzymujemy, iż* $Ef(x) \approx \delta y$. *Czyli elastyczność funkcji*

wskazuje o ile procent zmieni się w przybliżeniu wielkość y, *jeżeli* x *zwiększy się o* 1%" (Z. Dulewicz, 2000, s.200).

Zwykle potem nadaje się formalnym kwestiom interpretację wypowiadaną często w formie twierdzeń:

Jeżeli zmienna x *wzrośnie o* a% *licząc od poziomu* x_0, *to wartość funkcji wzrasta (maleje) w przybliżeniu o* b%, *gdzie* $b=aE_xf(x)$ (W. Dubnicki, 1999, s.133),

Elastyczność funkcji w punkcie jest przybliżoną miarą procentową przyrostu wartości funkcji odpowiadającej przyrostowi wartości argumentu o 1% (J. Piszczała, 1998, s. 83).

W matematyce akcentuje się, że elastyczność funkcji też jest funkcją; jej wartość obliczona w konkretnym punkcie x_0 informuje o ile procent zmieni się wartość funkcji wyjściowej, jeżeli argument zwiększymy o 1% powyżej poziomu x_0.

Nie występują na tym etapie tworzenia wiedzy odwołania do intuicji, skojarzeń geometrycznych i umiejętności interpretowania pochodnej, czy odpowiednich przyrostów w różnych kontekstach. Cechą charakterystyczną tych podręczników jest niewielka ilość rozwiązanych przykładów i modelowych rozwiązań. Również „lista" zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania często zawiera podobne pod względem struktury problemy, związane głównie z rachunkiem pochodnych, typu „oblicz elastyczność funkcji". Kolejno pojawiają się zagadnienia cenowej elastyczności popytu, dochodowej elastyczności popytu i elastyczności kosztu całkowitego. Znamiennym jest pojawianie się ich w szczególnych, uproszczonych sytuacjach zadaniowych, gdy popyt, podaż, czy koszt opisane są funkcjami wielomianowymi. Czasami następuje wtedy zmiana symboliki na tę stosowaną w naukach ekonomicznych; w miejscu litery x pojawia się p (cena), w miejscu f – litera q (popyt) lub K (koszt).

Z tej analizy jasno widać, że studenci poznają pojecie elastyczności funkcji i jej interpretację. Uczą się zastosowań w różnych sytuacjach matematycznych i ekonomicznych. Powstają pytania: czy autorzy podręczników do mikroekonomii odwołują się do tej wiedzy studenta, czy korzystają z dotychczasowych jego umiejętności? Jakie elementy koncepcji tego pojęcia[2] wykorzystują – formalne, czy intuicyjne? Które z nich ułatwiają interpretacje rozważanych w nich sytuacji? Czy te sytuacje są podobne pod względem struktury do analogicznych rozważanych w podręcznikach do matematyki?

---

[2] Na koncepcję pojęcia matematycznego składają się następujące elementy: baza intuicyjno – skojarzeniowa, elementy formalne, aparat komunikowania, związki i zależności z innymi pojęciami teorii, algorytmy i sposoby postępowania – narzędzia wykonawcze, a także sytuacje, w których pojęcie jest używane, które stanowią fundamentalną dla niego płaszczyznę odniesienia (zob. B. Bugajska-Jaszczołt, 2006).

4.2. Cenowa elastyczność popytu w podręcznikach do mikroekonomii

Już ogląd podręczników do mikroekonomii w warstwach matematycznych ujawnia, że pojęcie funkcji jest dla wielu elementów treści tam poruszanych pojęciem kluczowym. Zasadnicze znaczenie mają wykresy funkcji i umiejętności odczytywania i interpretowania danych w kontekście monotoniczności, ekstremum, granicy, pochodnej, wielkości krańcowych, elastyczności itd. Istotną różnicą w konstrukcji wiedzy w zakresie tych przedmiotów jest język.

W większości podręczników do mikroekonomii proponuje się jako punkt wyjścia do wprowadzenia pojęcia cenowej elastyczności popytu rozważanie sytuacji rzeczywistej, zwykle w kontekście wyboru konsumenta. Najpierw następuje odwołanie do wcześniejszych życiowych doświadczeń studenta, a także podstawowych umiejętności matematycznych (np. technik rachunkowych, obliczania procentów, wyznaczania wartości funkcji dla danego argumentu) i rozumienia pojęcia na poziomie intuicyjnym, a potem jego stopniowa formalizacja, prowadząca do sformułowania definicji, a następnie przykłady jej obliczania i dalszych zastosowań.

Cenowa elastyczność popytu definiowana jest jako: „*intensywność reakcji konsumentów (przejawiającą się skalą zmiany wielkości zakupów) na zmianę ceny*" (M. Kujda, 1998, s.154), „*procentowa zmiana wielkości popytu wynikająca z jednoprocentowej zmiany ceny*" (E. Mansfield, 2002, s.17), „*stosunek względnej zmiany wielkości zapotrzebowania na dane dobro do względnej zmiany jego ceny*" (D. Begg i in., 2000, s. 121) lub „*stosunek procentowej zmiany wielkości popytu na dane dobro do procentowej zmiany jego ceny*" (H. G. Adamkiewicz, K. Jędrzejewska 2000, s. 138) i wyrażana odpowiednio wzorem:

$$e_{dp} = \frac{\Delta D}{D} : \frac{\Delta P}{P} \text{ lub } e_{dp} = \frac{\%\Delta D}{\%\Delta P}.$$

Autorzy większości podręczników do mikroekonomii omawiając zagadnienia cenowej elastyczności popytu w ogóle nie odwołują się do granicy funkcji i elementów rachunku różniczkowego, milcząco zakładając, że osoby studiujące te kwestie nie znają rachunku różniczkowego. „*Sformułowania wychodzące od pochodnej mogą być wygodniejszym sposobem opisu elastyczności dla osób znających rachunek różniczkowy*" (H. R. Varian, 1997, s. 293). Pojęcia: granicy funkcji w punkcie oraz w nieskończoności, a także granicy niewłaściwej, nie pojawiają się jawnie. Przejścia graniczne są zazwyczaj charakteryzowane w sposób poglądowy, z użyciem obrazowego języka i odwoływaniem się do interpretacji geometrycznej. D Begg i in. (2000) podają: „*Na krótkim odcinku, odpowiadającym niewielkiej procentowej zwyżce lub zniżce ceny, krzywa popytu staje się niemalże linią prostą.*" (s. 123). T. Kątowski (1997) pisze: „*Załóżmy, że funkcja popytu dana jest równaniem o postaci ogólnej:*

$Q_x = a + bP_x$, *ceteris paribus*

Wówczas $\Delta Q_x = b\Delta P_x$, z czego wynika, że $b = \frac{\Delta Q_x}{\Delta P_x}$" (s.39).

Dalej proponuje, aby w celu wyznaczenia cenowej elastyczności popytu dla ceny p, zastosować wzór: $e_{dp} = b \cdot \frac{P_x}{Q_x}$.

W przytoczonych przykładach wyraźnie widać odwołanie się do interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji w punkcie, a dokładnie stycznej do wykresu funkcji w punkcie.

Niekiedy autorzy podają pewne reguły, którym brakuje matematycznej precyzji i ścisłości, np.: *„Dowolna liczba dzielona przez zero daje plus nieskończoność.*" (D. Begg i in. 2000, s. 122). Z punktu widzenia matematyki, tego typu informacje nie tylko pozostają w sprzeczności z wiedzą studenta wyniesioną z niższych etapów nauczania (nie wolno dzielić przez zero) i nie prowadzą do wytworzenia się w jego myśli idei głębokiej granicy niewłaściwej (zob. Z. Semadeni, 2002), ale mogą wypaczyć właściwy obraz i sens nadawany temu pojęciu w matematyce. Co więcej nie ma żadnych założeń odnośnie *„dowolnej liczby*", co może sugerować, że $\frac{0}{0} = +\infty$ lub $\frac{a}{0} = +\infty$, gdy $a < 0$.

Innym razem autorzy przyjmują, wygodną dla późniejszych interpretacji, umowę: *„będziemy mówić o elastyczności w wyrażeniu bezwzględnym*", gdyż znak elastyczności popytu jest na ogół ujemny.

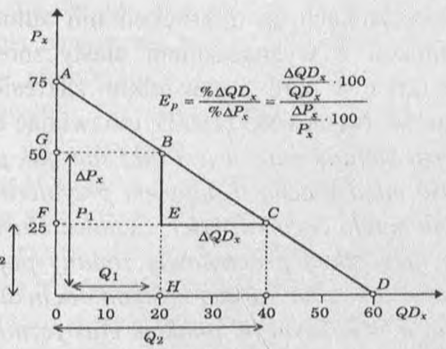
W podręcznikach do mikroekonomii znajdujemy informację, że *„pod pojęciem elastyczności punktowej rozumie się miarę elastyczności w danym punkcie na krzywej popytu (lub podaży), natomiast elastyczność łukowa to miara elastyczności na danym odcinku krzywej popytu (podaży). Elastyczność punktową oblicza się wtedy, gdy znana jest postać funkcji popytu dla danej ceny dobra. Jednak najczęściej postać funkcji popytu nie jest znana i wtedy możliwe ustalenie przeciętnej elastyczności cenowej popytu na dane dobro w pewnym, określonym przedziale cenowym. W celu obliczenia poszczególnych wartości współczynników elastyczności cenowej popytu (punktowej lub łukowej) stosuje się następujące wzory:*

– dla punktowej elastyczności cenowej popytu: $|E_D| = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}\right|$

– dla łukowej elastyczności cenowej popytu, do mierzenia przeciętnej elastyczności miedzy dwoma punktami: $|E_D| = \left|\frac{Q_2 - Q_1}{Q_1 + Q_2} : \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}\right|$ " (H.G. Adamkiewicz, K. Jędrzejewska 2000, s. 140). *„Przy małych zmianach ceny i popytu*

stosuje się elastyczność punktową. (...) W sytuacji, gdy zmiany ceny i popytu są większe, stosuje się elastyczność łukową." (P. Urbanek 2003, s. 36). Zauważmy, że na mikroekonomii z reguły najpierw wprowadzane jest pojęcie elastyczności punktowej, a dopiero później łukowej. Na początku rozpatruje się przyrosty bardzo małe, a następnie dowolnie duże. A zatem mamy tu odwrócenie sytuacji występującej na matematyce. W żadnym z analizowanych podręczników nie podano informacji, że wzór na punktową elastyczność popytu otrzymujemy ze wzoru na łukową elastyczność popytu po przejściu do granicy, gdy P_1 dąży do P_2.

G. Dębniewski i in. (2001) podają sposoby „mierzenia elastyczności łukowej" (s. 86):



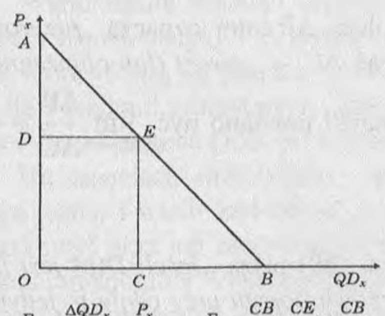
wartości przeciętne

$$E_p = \frac{\frac{+20}{30}\cdot 100}{\frac{-25}{37.5}\cdot 100} = -1 \qquad E_p = \frac{\frac{-20}{30}\cdot 100}{\frac{+25}{37.5}\cdot 100} = -1$$

ruch z B do C | ruch z C do B

Źródło: Rekowski M. 1996. *Wprowadzenie do mikroekonomii*. Polsoft, Poznań

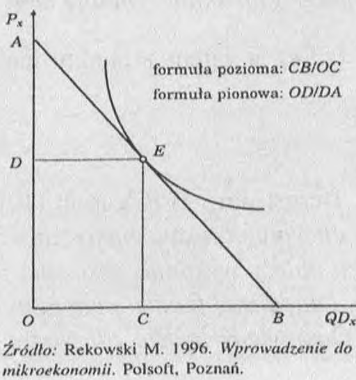
i „mierzenia elastyczności punktowej na osi pionowej i osi poziomej" (s. 88):



$$E_p = \frac{\Delta QD_x}{\Delta P_x}\cdot\frac{P_x}{QD_x} \qquad E_p = \frac{CB}{CE}\cdot\frac{CE}{OC} = \frac{CB}{OC}$$

$$E_p = \frac{DE}{DA}\cdot\frac{OD}{DE} = \frac{OD}{DA}$$

Źródło: Rekowski M. 1995. *Wprowadzenie do mikroekonomii*. Polsoft, Poznań.



Źródło: Rekowski M. 1996. *Wprowadzenie do mikroekonomii*. Polsoft, Poznań.

Wyznaczanie cenowej elastyczności popytu sprowadza się do odczytania danych z wykresu funkcji popytu, ustalenia przyrostów, obliczenia średnich wartości ceny i popytu oraz podstawieniu ich do odpowiedniego wzoru. Należy jednak zaznaczyć, że na matematyce i mikroekonomii obowiązują odmienne konwencje konstrukcji wykresów funkcji. W matematyce przyjęto, że wartości zmiennej niezależnej, oznaczanej symbolem x, są zaznaczane na osi poziomej, a zmiennej zależnej y – na osi pionowej. W mikroekonomii orientacja wykresu jest odwrotna – oś cen jest osią pionową, a oś popytu – osią poziomą. Co więcej, w wielu podręcznikach (np. T. Kątowski, 1997) na wykresie cena oznaczana jest literą y, a popyt – literą x.

W nielicznych podręcznikach do mikroekonomii autorzy jawnie pokazują związek pochodnej funkcji z wyznaczaniem elastyczności cenowej popytu i wprost odwołują się (choć w bardzo niewielkim zakresie) do elementów rachunku różniczkowego. M. Nasiłowski (1993), omawiając elastyczność jednostkową, pisze, że „*procent zmiany popytu jest taki sam jak procent zmiany ceny. Funkcjonalna zależność między ceną a popytem przybiera wówczas kształt hiperboli. Funkcja popytu spada coraz wolniej. Cenowa elastyczność popytu mierzona jest dzieleniem niewielkiej procentowej zmiany popytu przez niewielką procentową zmianę ceny, tak iż na bardzo krótkim odcinku krzywa popytu staje się niemal linią prostą, a w każdym jej punkcie elastyczność równa jest jedności*", a przypisie podaje „*Można to udowodnić matematycznie. Wzór hiperboli:* $p = \frac{1}{C}$, *po zróżniczkowaniu przybiera postać* $\frac{\Delta P}{\Delta C} = -\frac{1}{C^2}$. *Wzór elastyczności:* $e_p = \frac{\Delta P}{\Delta C} \cdot \frac{C}{P}$. *Stąd* $e_p = -\frac{1}{C^2} \cdot \frac{C}{\frac{1}{C}} = -\frac{1}{C^2} \cdot C^2 = -1$. *Posługując się wartościami bezwzględnymi uzyskujemy:* $e_p = 1$" (s. 60). Należy jednak zauważyć, że wypowiedź jest mało precyzyjna. Symbolem ΔP autor oznacza „*przyrost (lub spadek) popytu na skutek zmiany ceny*", zaś ΔC – „*wzrost (lub obniżenie) ceny towaru*" (s.58), a zatem z punktu matematyki powinno być $\lim_{\Delta C \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta C} = -\frac{1}{C^2}$, a nie $\frac{\Delta P}{\Delta C} = -\frac{1}{C^2}$.

T.C. Bergstrom i H.R.Varian (1997, s. 189) piszą „*Jeżeli D(p) jest funkcją popytu i chcemy obliczyć elastyczność cenową popytu przy cenie p, jedyną rzeczą, którą należy wykonać, jest obliczenie dD(p)/dp i pomnożenie wyniku przez p/q. (...). Dla każdej funkcji popytu trzeba znaleźć wzory na cenową elastyczność popytu. Odpowiedź będzie zazwyczaj jakąś funkcją ceny p. Jako przykład roz-*

ważmy liniową funkcję popytu $D(p) = 30 - 6p$. *Wtedy* $dD(p)/dp = -6$, *a* $p/q = p/(30-6p)$, *stąd cenowa elastyczność popytu wynosi* $-p/(5-p)$".

5. UNIFIKACJA PROGRAMÓW – PROPOZYCJA ZMIAN

- Sens cenowej elastyczności popytu ustala się znacznie wcześniej na mikroekonomii, niż ma to miejsce w matematyce. Określenia tego pojęcia na obu przedmiotach różnią się od siebie, przede wszystkim językiem i niezbędną wiedzą wstępną, konieczną dla ich zrozumienia. Na mikroekonomii dla jego zrozumienia niezbędna jest znajomość pojęć: przyrost względny i procent, a także podstawowych praw ekonomicznych, natomiast na matematyce – elementów rachunku różniczkowego. Na mikroekonomii pojęcie to wprowadzane jest w sposób intuicyjno – opisowy, wyobrażeniowy, a na matematyce – formalny.
- Dla nauczania studentów kierunku ekonomia istotne znaczenie ma zgodność ekonomicznego rozumienia tego pojęcia z matematycznym. Jednakże, jak pokazuje praktyka, nagromadzone wcześniej elementy wiedzy o charakterze intuicyjnym, nie zawsze otwierają prostą drogę do bezkonfliktowego przejścia na grunt formalnej teorii matematycznej. Te pierwotnie ukształtowane intuicje, skojarzenia, wyobrażenia, metody badania i posługiwania się pojęciem są na tyle silne, że najdłużej funkcjonują w obrazie pojęcia, niekiedy pozostając w konflikcie z formalnym rozumieniem lub prowadząc do wyeliminowania definicji znanej z kursu matematyki. Zdarza się, że wiedza matematyczna funkcjonuje jakby obok wiedzy ekonomicznej. Wówczas podstawą działania stają się schematy postępowania wytworzone na zajęciach z mikroekonomii, w konkretnych sytuacjach, zadaniach, przykładach, za pomocą których skutecznie badano rozmaite problemy.
- Wielokrotnie studenci zupełnie inaczej rozwiązują ten sam problem na zajęciach z matematyki i mikroekonomii. Nie dostrzegają wspólnego modelu zadań, które różnią się językiem, stosowana symboliką i kontekstem sytuacyjnym. Są świadomi odmiennych, funkcjonujących na różnych przedmiotach narzędzi i metod badania (zob. M. Czajkowska, 2006).
- Na zajęciach matematyki, zgodnie ze standardami, studenci poznają funkcje jednej i wielu zmiennych (a zwłaszcza funkcje elementarne, rachunek różniczkowy) oraz ich zastosowania ekonomiczne. A zatem na zajęciach z mikroekonomii mogliby wykorzystywać gotowe narzędzia matematyczne do rozwiązywania problemów ekonomicznych. To wymagałoby jednak współpracy matematyków i ekonomistów w celu wypracowania skoordynowanych kursów matematyki i mikroekonomii. Konieczne byłoby również, w przypadku wielu uczelni, wprowadzenie zmian w planach studiów, tak, aby studenci uczęszczając

na zajęcia z mikroekonomii posiadali już wiedzę z zakresu analizy matematycznej, zdobytą w toku kursu matematyki.

- Pomimo, że zarówno na matematyce jak i mikroekonomii omawiana jest cenowa elastyczność popytu, to jednak w celu jej wyznaczenia studenci na każdym z przedmiotów muszą wykazać się odmiennymi umiejętnościami. Na matematyce istotną rolę odgrywa umiejętność wyznaczania pochodnej danej funkcji, przekształcania wyrażeń i wyznaczania wartości funkcji dla danego argumentu; na mikroekonomii – kluczowa jest umiejętność odczytywania informacji z wykresu funkcji i obliczania przyrostów.
- Analiza podręczników ujawnia potrzebę koordynacji kursu matematyki i mikroekonomii, zarówno w aspekcie treściowym jak i językowym. Skuteczne komunikowanie się powinno stać się celem priorytetowym. W tym zakresie należałoby przede wszystkim uświadomić studentom specyfikę terminologii i symboliki na obu przedmiotach. Przykładem takiego zabiegu niech będzie zamieszczona poniżej tabela przedstawiająca, iż sens pojęcia elastyczności funkcji jednej zmiennej w punkcie jest jeden, nadawany przez definicję i wynikającą z niej interpretację, możliwą do wypowiedzenia za pomocą różnych elementów języka (matematycznego – ścisłego, formalnego, czy też ekonomicznego – intuicyjnego, ale sugestywnie oddającego istotę rzeczy).

	Matematyka	**Mikroekonomia**
Symbol	$E_x f(x)$, $E(f(x))$, $E(c)$, Wzór: $E_x f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$ $E(f(x)) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x}$	e_p, e_{dp}, E_D, Wzór: $e_{dp} = \frac{\Delta D}{D} : \frac{\Delta P}{P}$ $e_{dp} = \frac{\% \Delta D}{\% \Delta P}$.
Sens	iloraz pochodnej w punkcie oraz przeciętnej wartości funkcji jednej zmiennej,	intensywność reakcji konsumentów na zmianę ceny,
Metoda badania	wartość liczbowa wyznaczana za pomocą gotowych wzorów i interpretowana w różnych kontekstach	wartość liczbowa ustalana „geometrycznie” z wykorzystaniem proporcji długości odpowiednich odcinków

LITERATURA

Adamkiewicz H. G., Jędrzejewska K. (2000), *Mikroekonomia. Gospodarka rynkowa i podstawy zachowania konsumenta*, Wyd. Ośrodek Doradztwa i Doskonalenia Kadr Sp. z o. o., Gdańsk.

Bednarski T. (2004), *Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Podręcznik dla studentów ekonomii*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.

Begg D., Fischer S., Dornbusch R. (2000), *Ekonomia. Mikroekonomia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Bergstrom T. C. i Varian H. R. (1997), *Ćwiczenia z mikroekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Bugajska-Jaszczołt B. (2006), *O prawidłowościach tworzenia pojęć matematycznych na przykładzie pojęcia wyznacznika macierzy*, [w:] *Efektywność procesu nauczania w szkołach wyższych*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s. 103– 117.

Bugajska-Jaszczołt B., Drygała D. (2006), *Aspekty sytuacyjne wybranych pojęć algebry liniowej*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 175–190.

Czajkowska M. (2006), *Czynności o charakterze motywacyjnym podejmowane przez studentów kierunków ekonomicznych w toku rozwiązywania zadań matematycznych*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 223–243.

Dąbrowa M. (2006), *Wybrane podręczniki do mikroekonomii a kształcenie matematyczne studentów kierunków ekonomicznych*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 163–174.

Dębniewski G., Pałach H., Zakrzewski W. (2001), *Mikroekonomia wybrane problemy do wykładów i ćwiczeń*, Wyd. Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn.

Dubnicki W. (1999), *Analiza matematyczna: podręcznik dla ekonomistów*, PWN, Warszawa.

Dulewicz Z., Dulewicz Z. (2001), *Matematyka dla licencjackich studiów ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce.

Kątowski T. (1997), *Podstawowy wykład z mikroekonomii*, Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.

Kończak G. (2006), *Nauczanie statystyki z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel – korzyści i problemy*, [w:] *Efektywność procesu nauczania w szkołach wyższych*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, s.159–166.

Kujda M. (1998), *Mikroekonomia*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów.

Lassak M. (2000), *Matematyka dla kierunków ekonomia, zarządzanie, marketing, bankowość*, SUPREMUM, Warszawa.

Mansfield E. (2002), *Podstawy Mikroekonomii. Zasady, przykłady, zadania*, Agencja Wydawnicza „PLACET", Warszawa.

Matłoka M., Wojcieszyn B. (1996), *Matematyka z elementami zastosowań w ekonomii*, Wyższa Szkoła Bankowa, Poznań.

Nasiłowski M. (1993), *System rynkowy. Podstawy mikro- i makroekonomii*, Wyd. Key Text, Warszawa.

Ostoja-Ostaszewski A. (1996), *Matematyka w ekonomii, modele i metody, cz. I, Algebra elementarna*, PWN, Warszawa.

Pardała A. (2006), *Współczesne tendencje w podstawach matematyki dla ekonomistów*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 51–62.

Piszczała J. (1998), *Matematyka i jej zastosowanie w naukach ekonomicznych*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Raport z badań na temat: Dobór treści i metod nauczania przedmiotów ilościowych (matematyki, statystyki, ekonometrii) w oparciu o badania studentów WSEiA w Kielcach, (red. Zbigniew Dulewicz), 2002, Kielce.
Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 18 kwietnia 2002 r. w sprawie określenia standardów nauczania dla poszczególnych kierunków studiów i poziomów kształcenia. Standardy nauczania dla kierunku studiów ekonomia.: 2002, Dz.U.2002, nr 116, poz. 1004.
Semadeni Z. (2002), *Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, Dydaktyka Matematyki 24, Roczniki PTM, s. 41–91.
Smoluk A. (2002), *Ekonomia myśli i racjonalizacja nauki, czyli rzecz o strukturach matematycznych*, Dydaktyka Matematyki nr 1, Wrocław.
Szałański M. (2006), *Jak pomóc ekonomistom, czyli o jednolitej metodzie badania funkcji ciągłych i dyskretnych*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 261–282.
Treliński G. (2006), *Rola i miejsce matematyki jako przedmiotu nauczania w systemie kształcenia matematycznego na studiach ekonomicznych*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 31–50.
Urbanek P. (red) (2003), *Mikroekonomia*, Wyd. Wyższej Szkoły Humanistyczno-Ekonomicznej w Łodzi, Łódź.
Varian H. R. (1997), *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa.
Witkowska D. (2006), *Realizacja przedmiotów ilościowych na studiach ekonomicznych oraz z dziedziny zarządzania*, [w:] *Edukacja matematyczna na studiach ekonomicznych*, Wyd. WSEiA, Kielce, s. 93–104.

Beata Bugajska-Jaszczołt, Monika Czajkowska

THE COORDINATION OF THE MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND MICROECONOMICS THEMES – THE PRESENT STATE AND PROPOSALS OF CHANGES (ON THE EXAMPLE OF PRICE FLEXIBILITY OF DEMAND)

In this paper the authors focus on and characterize the qualitative differences which occur in the process of formulating the concept of resilience of function. The concept is introduced during the courses of mathematics as well as microeconomics. The textbooks of mathematics and microeconomics for economics students were compared. The aim of evaluation was to characterize the way the concept is formulated and defined (necessity of prior knowledge, formal, algorithmic or intuitive approach), a language used (selection of terms and symbols), a discrepancy (and a correspondence) between the ways the concept is grasped in mathematics and microeconomics.