ROZDZIAŁ 6

LOKALNE I GLOBALNE KRYTERIA LOGICZNOŚCI

POJĘCIE „KRYTERIUM LOGICZNOŚCI"

W poprzednich rozdziałach przedstawione zostały omówione różne kryteria logiczności, będące uściśleniami:

1) przejrzystości dla wyrażeń logicznych,
2) niezależności tematycznej dla relacji wynikania,
3) uniwersalności dla teorii zwanej logiką.

Kryteria te przybierały różną postać, stosowano w nich różnorodną, często mylącą terminologia i prezentowano odmienne stanowiska filozoficzne. Niektóre z nich oddawały niejasność pojęć, które miały uściślać. Ponadto nie zawsze można było wyraźnie określić jaki jest zakres stosowania poszczególnych kryteriów, gdyż przymiotnik „logiczny" mógł pochodzić od różnych znaczeń terminu „logika". Termin „kryterium" używany był również w sposób nieprecyzyjny. Aby uniknąć wątpliwości co do sposobu jego rozumienia, spróbujmy uściślić znaczenie tego terminu.

Przez **kryterium logiczności** będziemy rozumieli **definicję**, której *definiendum* stanowi termin „logiczny", *definiensem* zaś jest, w zależności od tego do czego odnosimy ten termin, odpowiednio *explicatum* pojęć „uniwersalny", „niezależny tematycznie" lub „przejrzysty". Gdyby kryterium logiczności było wyraźną definicją równościową, nic nie stałoby na przeszkodzie, aby pary pojęć: znak **logiczny** – wyrażenie **przejrzyste**, relacja wynikania **logicznego** – **niezależna tematycznie** relacja wynikania i **logika** – teoria **uniwersalna**, traktować jako synonimy. Nadzieja na uzyskanie takiego rezultatu występowała wyraźnie w rozdziale pierwszym. Jednak jak to zostało pokazane w kolejnych rozdziałach każda próba wyeksplikownia pojęć uniwersalności, niezależności tematycznej i przejrzystości prowadzi do rezultatów, które odbiegają, niekiedy znacznie, od sposobu rozumienia terminu „logiczny".

Proponowane tutaj ostrożniejsze podejście będzie polegało na cząstkowym zdefiniowaniu pojęcia logiczności za pomocą wyeksplikowanych pojęć uniwersalności, niezależności tematycznej lub przejrzystości. Spośród omówionych w poprzednich rozdziałach definicji regulujących wymienionych pojęć, na szczególną uwagę zasługują trzy, gdyż charakteryzują się ścisłością oraz jasnymi kryteriami stosowania.

1. **Przejrzystość** wyrażeń rozumiana jako stałość i inwariantność ich denotacji (Tarski, McCarthy);
2. **Niezależność tematyczna** relacji wynikania rozumiana jako zachowywanie strukturalnych cech konsekwencji logicznej w teorii wzbogaconej o reguły wprowadzania nowych stałych (Hacking i Došen);
3. **Uniwersalność** teorii rozumiana jako ograniczenie na język, w którym jest ona formułowana (Quine).

Żadne z wymienionych kryteriów logiczności nie zyskało powszechnego uznania i wobec każdego z nich stawiane są różnego rodzaju zarzuty. Są one często całkowicie bezzasadne, gdyż każde z kryteriów odnosi się, bezpośrednio lub pośrednio, do innej teorii pretendującej do miana „logiki". Wspomniane kontrowersje brały się często z mylnego odnoszenia tych kryteriów do logiki rozumianej jako szersza lub węższa klasa teorii.

Termin „logiczny" możemy odnosić bezpośrednio do samej teorii, do relacji wynikania i do pewnych wyrażeń. Jeżeli teoria T rozumiana jest jako język L z określoną na nim relacją wynikania R, a zbiór wyrażeń A słownika języka L jest taki, że w każdej regule R pełni **istotną rolę** przynajmniej jedno wyrażenie ze zbioru A i każde wyrażenie ze zbioru A pełni **istotną rolę** w przynajmniej jednej regule z R, to równoważne są trzy następujące zdania:

1. Teoria T jest **logiką;**
2. Relacja R jest relacją **wynikania logicznego**;
3. Zbiór A jest zbiorem **wyrażeń logicznych**.

Wobec powyższego wymienione trzy kryteria logiczności można pośrednio odnieść do teorii, relacji wynikania i do znaków.

KRYTERIUM SEMANTYCZNE

Inwariantność traktuje się zazwyczaj jako warunek konieczny logiczności wyrażeń, dlatego że w dostatecznie bogatym języku istnieją takie obiekty niezmiennicze, które jedynie logicysta byłby skłonny uznać za zamierzone denotacje wyrażeń logicznych. Ponadto warunek inwariantności stanowi kryterium logiczności wyrażeń jedynie w tych teoriach, które posiadają semantykę teoriomodelową.

Niezmienniczość jest własnością pewnego bytu pozajęzykowego, który z racji owej własności może być nazywany obiektem logicznym. Aby ten specjalny obiekt był zamierzoną denotacją wyrażenia logicznego, należy w specjalny sposób ograniczyć klasę funkcji interpretacyjnych. Najczęściej warunek ten, zwany warunkiem stałości, zakładany był *implicite* lub wyrażony łącznie z warunkiem inwariantności. Mówiąc o niezmienniczości obiektów logicznych i ograniczeniu klasy funkcji interpretacyjnych, odwołujemy się do pojęcia modelu oraz do pewnej ontologii, dla której musi być ustalona metoda konstruowania typów semantycznych. Do typów semantycznych należą obiekty określonego rodzaju, na przykład elementy zbiorów, zbiory, klasy zbiorów i funkcje na różnych obiektach teoriomnogościowych, będące możliwymi denotacjami wyrażeń odpowiadających tym typom kategorii syntaktycznych. Zatem kryterium inwariantności zrelatywizowane jest do pewnych założeń o charakterze teoriomodelowym i ontologicznym, co prowadzi do następującego kryterium logiczności:

Jeżeli teoria T posiada adekwatną semantykę teoriomodelową (*z dziedziną interpretacji i nadbudowanymi nad nią typami semantycznymi*)*, to jeżeli wyrażenie α należące do języka teorii T jest* ***wyrażeniem logicznym****, to α spełnia warunek inwariantności i stałości.*

Zauważmy, że powyższa definicja cząstkowa, podającą negatywne kryterium logiczności ma postać jednostronnej definicji redukcyjnej Carnapa[1]. A zatem predykat „logiczny" może być definiowany analogicznie do predykatów dyspozycyjnych. Zwrot „wyrażenie α spełnia kryterium" oznacza, że przy spełnieniu pewnych założeń natury semantycznej, kryterium nie wyklucza logiczności spełniającego go wyrażenia α.

Semantyczne kryterium logiczności można również stosować do spójników w ekstensjonalnych logikach zdaniowych, dla których jest spełnione w sposób trywialny. Dotyczy to zarówno klasycznego dwuwartościowego rachunku zdań, jak i logik wielowartościowych. Wartości logiczne można bowiem utożsamić z pewnymi niezmienniczymi obiektami teoriomnogościowymi, np. prawdę z (niepustą) dziedziną interpretacji lub ze zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów obiektów dziedziny interpretacji, fałsz zaś ze zbiorem pustym. Dla logik wielowartościowych można kolejnym wartościom logicznym przypisać inne niezmiennicze obiekty, np. zbiór ciągów elementów dziedziny interpretacji o tych samych elementach.

W kryterium semantycznym bardzo ważna rolę pełni warunek stałości. Jeżeli prawdę zastąpimy niezmienniczym obiektem D, fałsz zaś niezmienniczym obiektem $\varnothing$, nie oznacza to, że oznaczające te obiekty symbole zdaniowe są stałymi logicznymi. Nie wymagamy bowiem, aby dla konkretnego symbolu zdaniowego wszystkie dopuszczalne funkcje interpretacyjne

[1] Definicja ta nie spełnia podstawowego wymogu definicji redukcyjnej, której celem jest definiowanie predykatów teoretycznych, w tym również dyspozycyjnych, za pomocą predykatów obserwacyjnych.

przyporządkowywały mu ten sam obiekt logiczny, np. *D*. Innymi słowy nie wymagamy, aby zachodził warunek stałości. Warunek ten musi jednak zachodzić dla spójnika koniunkcji, któremu każda **dopuszczalnej** funkcja interpretacyjna musi przyporządkowywać ten sam obiekt logiczny, będący funkcją opisaną tabelą:

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
D	D	D
D	$\varnothing$	$\varnothing$
$\varnothing$	D	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

A zatem kryterium semantyczne spełnione jest przez klasyczne spójniki zdaniowe, klasyczne kwantyfikatory oraz predykat identyczności. Również w przypadku teorii mnogości i arytmetyki wprowadzonych w ramach teorii typów, kryterium to spełniają między innymi predykat bycia zbiorem, predykat należenia do zbioru, liczebniki i znaki operacji arytmetycznych.

Operatory modalne w logikach posiadających semantykę możliwych światów, spełniają warunek inwariantności i stałości w sformułowaniu podanym przez McCarthy'go:

Jeżeli teoria T posiada adekwatną semantykę możliwych światów z dziedziną interpretacji i nadbudowanymi nad nią typami semantycznymi, to jeżeli wyrażenie α języka T jest ***wyrażeniem logicznym****, to α spełnia warunek inwariantności i stałości* (*ze względu na możliwe światy i dziedzinę interpretacji*).

Kryterium to jest spełnione w sposób trywialny przez ekstensjonalne funktory logiczne, których korelaty semantyczne nie zależą od możliwych światów. Tak rozszerzone kryterium spełniają również spójniki i kwantyfikatory logiki intuicjonistycznej, posiadającej semantykę możliwych światów oraz operatory w „logikach" intensjonalnych, które posiadają semantykę możliwych światów z relacją dostępności, niezmienniczą ze względu na permutacje zbioru możliwych światów[2].

KRYTERIUM TEORIODOWODOWE

[2] Chodzi tu, na przykład o takie własności relacyjne jak zwrotność, spójność, przechodniości, symetryczność, asymetryczność, antysymetryczność i przechodniość.

Teoriodowodowe kryterium logiczności jest oparte na pojęciu zachowywania strukturalnych cech relacji wynikania logicznego przez reguły wprowadzania nowych wyrażeń. Z kryterium tym wiążą się dwa problemy poruszane już w rozdziale piątym. Pierwszy z nich dotyczy statusu reguł strukturalnych, w przypadku których milcząco się zakłada, że są niezależne tematycznie. Zatem **strukturalność** u Došena i Hackinga pełni funkcję *explicatum* pojęcia niezależności tematycznej. Niezależność tematyczna reguł strukturalnych logiki klasycznej, intuicjonistycznej i logiki relewantnej *R* nie budzi zazwyczaj intuicyjnego sprzeciwu. Natomiast niezależność tematyczna reguły strukturalnych dla niektórych logik modalnych i temporalnych nie jest już tak oczywista.

Drugi problem wiąże się ze sposobem eksplikowania pojęcia „zachowywania cech strukturalnych", czyli pojęcia „zachowywania niezależności tematycznej". Jako *explicatum* tego pojęcia nie może służyć, o czym już wspominaliśmy, klasyczne pojęcie konserwatywności rozszerzenia syatemu. Dwa bardziej realistyczne rozwiązania to niestandardowo rozumiana zachowawczość u Hackinga i analizowalność w kategoriach strukturalnych u Došena. Niestety oba prowadzą do nieco odmiennych rezultatów w przypadku logik modalnych.

Definicja predykatu „logiczny" musi zatem uwzględniać zależność tego pojęcia do milcząco założonego warunku, że reguły strukturalne są niezależne tematycznie oraz od warunku głoszącego, że zachowawczość w sensie Hackinga lub analizowalność w kategoriach strukturalnych w sensie Došena stanowi *explicatum* pojęcia zachowywania niezależności tematycznej. Kryterium teoriodowodowe przybiera więc następującą postać:

Jeżeli relacja wynikania R, w której regułach wyrażenia ze zbioru A pełnią istotną rolę, może być opisana za pomocą rachunku sekwentów Gentzena, to jeżeli relacja ta jest relacją ***wynikania logicznego****, to wszystkie reguły wprowadzania wyrażeń ze zbioru A są* ***zachowawcze*** *w sensie Hackinga* (*lub stanowią* ***analizę*** *wyrażeń ze zbioru A w kategoriach strukturalnych w sensie Došena*).

Podobnie jak w przypadku kryterium semantycznego, kryteria Hackinga i Došena nie informują nas, które wyrażenia są wyrażeniami logicznym, lecz które wyrażenia nimi nie są. Pod tym względem bardziej restrykcyjne jest kryterium Hackinga, którego nie spełniają operatory modalne. Dla logik modalnych Hacking używa reguł strukturalnych sformułowanych przez Gentzena dla logiki klasycznej, natomiast Došen używa specyficznych reguł, w których występują sekwenty wyższego rzędu. Ponieważ zestaw reguł strukturalnych przyjętych przez Došena jest bogatszy od zestawu przyjętego przez Hackinga, to kryterium Došena pozwala więcej teorii uznać za logiczne. Założenie, że relacja wynikania

zdefiniowana regułami strukturalnymi jest niezależna tematycznie jest milcząco zawarte w stwierdzeniu, które głosi, że relacja ta opisana jest za pomocą rachunku sekwentów. Kryterium teoriodowodowe można zatem podać w następującej, rozwiniętej postaci:
*Jeżeli relacja wynikania R, w której regułach wyrażenia ze zbioru A pełnią istotną rolę, może być opisana za pomocą rachunku sekwentów, w którym reguły strukturalne opisują **niezależność tematyczną** tej relacji, to jeżeli relacja ta jest relacją **wynikania logicznego**, to wszystkie reguły wprowadzania wyrażeń ze zbioru A **zachowują** (w sensie Hackinga lub Došena) własność **niezależności tematycznej** reguł strukturalnych*

KRYTERIUM JĘZYKOWE

Według kryterium językowego ani języka logiki, ani sposób zdefiniowania relacji wynikania logicznego nie powinny rozróżniać zmiennych, a w konsekwencji obiektów, które mogą być ich wartościami. Rozróżnienie takie stoi bowiem w sprzeczności z wymogiem **uniwersalności** logiki. Według Quine'a, który był zwolennikiem tego kryterium, teorie pretendujące do miana logiki powinny być formułowane w **jednozakresowym** języku rachunku predykatów pierwszego rzędu lub w języku zdaniowym rzędu zerowego. Jednozakresowy język pierwszego rzędu pozwala bowiem, aby kwantyfikatory wiązały zmienne jednego tylko typu – zmienne indywiduowe, które mogą oznaczać wszystkie możliwe obiekty lub zastępować dowolne stałe indywiduowe. Niedopuszczalne jest również, aby aksjomaty lub reguły wynikania dokonywały jakichkolwiek rozróżnień między zmiennymi. Łączne zachodzenie wymienionych warunków nazwijmy **warunkiem jednolitej kwantyfikacji**.

Określenie „rząd języka" stosuje się jedynie do języków, w których występują kwantyfikatory wiążące zmienne. Ani język sylogistyki, ani pewne formalizacje języka naturalnego nie posiadają kwantyfikatorów wiążących zmienne, co sprawia, że nie stosuje się do nich warunek jednolitej kwantyfikacji. Kryterium językowe Quine'a przybiera zatem następującą postać:

*Jeżeli ekstensjonalna teoria T jest wyrażona w języku L, w którym występują kwantyfikatory wiążące zmienne, to jeżeli teoria T jest **logiką**, to zachodzi dla niej warunek jednolitej kwantyfikacji.*

Kryterium to, podobnie jak poprzednie kryteria, jest definicją cząstkową podającą negatywny warunek logiczności.

Przyjrzyjmy się kilku zastosowaniom tego kryterium. Dla klasycznego rachunku predykatów pierwszego rzędu z identycznością spełniony jest warunek jednolitej kwantyfikacji. Kryterium zatem nie wyklucza logiczności spójników, kwantyfikatorów i predykatu identyczności. Każda teoria nadbudowana nad logiką pierwszego rzędu rozróżnia zmienne wiązane przez kwantyfikatory, bez względu na to czy oba rodzaje zmiennych są rozróżniane graficznie. Niekiedy w teoriach pozalogicznych używany jest pozornie tylko jeden rodzaj zmiennych, na przykład w arytmetyce jako teorii pierwszego rzędu stosuje jedynie zmienne liczbowe. Niemniej aksjomaty specyficzne arytmetyki faktycznie wyróżniają spośród zmiennych języka logiki pierwszego rzędu, których wartościami mogą być dowolne obiekty, zmienne liczbowe, których wartościami mogą być jedynie specjalne obiekty zwane liczbami. Na przykład aksjomatyka arytmetyki Peano wyróżnia spośród stałych indywiduowych liczebniki, a spośród zmiennych indywiduowych – zmienne liczbowe. W aksjomatach Peano kwantyfikuje się bowiem nie po wszystkich zmiennych, jak w aksjomatyce rachunku predykatów, lecz po zmiennych liczbowych. Kryterium językowe wyklucza zatem logiczność arytmetyki, a co za tym idzie logiczność wyrażeń występujących w sposób istotny jej twierdzeniach, np. liczebników, funkcji następnika, znaków operacji arytmetycznych oraz predykatów większości, mniejszości i parzystości.

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku teorii mnogości jako teorii pierwszego rzędu. Specyficzne aksjomaty teorii mnogości faktycznie wyróżniają spośród zmiennych, których wartościami mogą być dowolne obiekty, zmienne, których wartościami są specjalne obiekty zwane zbiorami. Dlatego też kryterium językowe wyklucza logiczność stałej indywiduowej $\varnothing$, predykatów bycia zbiorem, bycia podzbiorem, należenia do zbioru oraz nazw operacji sumy, różnicy i dopełnienia zbiorów.

Kryterium Quine’a daje się również zastosować do teorii intensjonalnych pod warunkiem, że występujące w nim wyrażenia intencjonalne zdefiniujemy w pewnym języku ekstensjonalnym, czyli gdy przetłumaczymy wszystkie zdania języka intensjonalnego na pewien język ekstensjonalny. Zagadnienia eliminowania intensjonalności były poruszane między innymi przez Rudolfa Carnapa i Kazimierza Ajdukiewicza. Jedna ze strategii eliminowania intensjonalności w języku polega na uznaniu wyrażeń intensjonalnych za specyficzne skróty złożonych wyrażeń wielozakresowego języka ekstensjonalnego[3]. Jeżeli rozpatrywana modalna logika predykatów posiada semantykę możliwych światów, to ów język ekstensjonalny posiada specjalny rodzaj zmiennych, których wartościami mogą być możliwe światy. Dlatego też intensjonalny operator konieczności można potraktować jako skrót wyrażenia w dwuzakresowym języku pierwszego rzędu. Wymaga to wprowadzenia do języka dodatkowych zmiennych w_i przebiegających zbiór możliwych światów, stałej w^* oznaczającej świat rzeczywisty, predykatu R oznaczającego charakterystyczną

[3] Por. Nowaczyk [1999], s. 75−79.

dla każdej logiki modalnej relację dostępności oraz predykatu E oznaczającego zbiór obiektów istniejących w możliwym świecie. Funkcję F odwzorowującą formuły jednozakresowego języka pierwszego rzędu na formuły dwuzakresowego języka pierwszego rzędu ozamierzonej interpretacji modalnej definiuje się przez indukcję[4]:

$$(P^k(x_{i1}, ..., x_{ik}))^F = P^k(x_{i1}, ..., x_{ik}, w^*)$$

W szczególnym przypadku symbole zdaniowe można potraktować jako predykaty zeroargumentowe $P^{0F} = P^0(w^*)$.

$$(\neg\alpha)^F = \neg(\alpha)^F$$
$$(\alpha \Rightarrow \beta)^F = (\alpha^F \Rightarrow \beta^F)$$
$$(\forall x_i(\alpha))^F = \forall x_i(E(x_i, w^*) \Rightarrow (\alpha)^F)$$
$$(\Box(\alpha))^F = \forall w_j(R(w^*,w_j) \Rightarrow (\alpha)^F[w^*/w_j])$$

gdzie formuła $E(x_i, w^*)$ znaczy tyle co „x_i istnieje w świecie w^*”, zaś $(\alpha)^F[w^*/w_j]$ oznacza rezultat zastąpienia w formule $(\alpha)^F$ stałej w^* zmienną w_j.

Logiki modalne nie spełniają kryterium językowego Quine’a, gdyż operatory konieczności i możliwości służy tu do kwantyfikowania po wyróżnionym zbiorze zmiennych.

W STRONĘ GLOBALNYCH KRYTERIÓW LOGICZNOŚCI

Każda z podanych w tym rozdziale definicji cząstkowych predykatu „logiczny”, o którym dla uproszczenia załóżmy, że odnosi się do wyrażenia α pełniącego istotną rolę w schematach wynikania rozpatrywanej teorii, podpada pod schemat:

$$Zi_i \Rightarrow (L_i(\alpha) \Rightarrow E_i)$$

gdzie Z_i jest pewnym założeniem lub ograniczeniem, na którym opiera się teoria: Z_s jest założeniem o charakterze semantycznym, Z_d – założeniem o charakterze teoriodowodowym i Z_j - założeniem o charakterze językowym. L_i jest predykatem „logiczny”, zaś E_i jest *eksplicatum* pojęcia przejrzystości (E_s), niezależności tematycznej (E_d) lub uniwersalności (E_j).

Podejście polegające na uzależnieniu predykatu „logiczny” od pewnych sposobów formułowania logiki i definiowaniu go w sposób cząstkowy redukcyjnej ma dwie zalety.

---

[4]. Cytuję za Nowaczyk [1999], s. 76.

1. Ponieważ w podejściu tym nie ma mowy o logiczności absolutnej, niezależnej od sposobu wprowadzania logiki, lecz o logicznościach typu semantycznego, teoriodowodowego czy językowego, to nie zamyka ono drogi przed możliwością wprowadzania kryteriów innego rodzaju;
2. Żadne z wymienionych kryteriów nie rozstrzyga problemu logiczności, gdy nie jest spełnione założenie Z_i. Nie przesądza to jednak o niemożliwości takiego przeformułowania teorii, aby założenie to zostało spełnione. Może tak się stać, gdy zostanie zbudowana adekwatna semantyka, w której można zdefiniować inwariantność lub, gdy relacja konsekwencji zostanie sformalizowana za pomocą rachunku Gentzena.

Każda z wymienionych definicji stanowi kryterium logiczności dla wyrażeń pewnej teorii. Czy można jednak mówić również o kryteriach logiczności wyrażeń występujących w klasach teorii równoważnych, w znaczeniu podanym w rozdziale pierwszym? Chodzi tu, na przykład, o logikę klasyczną, intuicjonistyczną, logikę modalną $S4$ i logikę modalną $S5$, teorię mnogości i arytmetykę. Z formalnego punktu widzenia odpowiedź jest pozytywna. Z trzech wymienionych definicji wynika bowiem następująca:

$$(Z_s \wedge Z_d \wedge Z_j) \Rightarrow ((L_s(\alpha) \wedge L_d(\alpha) \wedge L_j(\alpha)) \Rightarrow (E_s \wedge E_d \wedge E_j))$$

Logika klasyczna jako klasa teorii definiowanych za pomocą równoważnych systemów aksjomatycznych, systemu rachunku sekwentów i semantycznie, spełnia to „globalne" kryterium. Dlatego też logika klasyczna stanowi, jak podkreśla wielu autorów prac poświęconych problematyce logiczności, niekwestionowane „jądro logiki". Otwarty pozostaje natomiast problem, które spośród klas teorii zwanych logikami nieklasycznymi spełniają globalne kryterium logiczności. Kryterium tego nie spełniają żadne rozszerzenia klasycznego rachunku predykatów z identycznością[5], dlatego też warto jest badać pod tym kątem logiki alternatywne.

LOGICZNOŚĆ ZNAKÓW W LOGICE INTUICJONISTYCZNEJ

Logika intuicjonistyczna może być definiowana jako system aksjomatyczny i system rachunku sekwentów; posiada ona również adekwatną semantykę możliwych światów. Intuicjonistyczny rachunek predykatów spełnia kryterium językowe Quine'a i kryterium teoriodowodowe Došena. Pewien problem stwarza jednak semantyka intuicjonizmu, w której obok obiektów dziedziny interpretacji występują możliwe światy. Wprawdzie można do niej tej z powodzeniem

[5] Jest tak gdyż rozszerzenia klasycznego rachunku predykatów z identycznością nie spełniają np. kryterium językowego Quine'a.

zastosować intensjonalne kryterium inwariantności McCarthy'ego, ale analogia z semantykami logik modalnych może nasuwać podejrzenie, że w aksjomatyce intuicjonizmu, kryją się, niewidoczne na pierwszy rzut oka, rozróżnienia między zmiennymi. Z języka intuicjonizmu można bowiem wyeliminować stałe intuicjonistyczne na rzecz stałych klasycznych, wprowadzając, podobnie jak to było pokazane w poprzednim paragrafie dla logik modalnych, zmienną przebiegającą możliwe światy. W takim przypadku okazałoby się, że intuicjonizm nie spełniałby kryterium językowego Quine'a.

Można jednak ominąć przedstawioną wyżej trudność pokazując, że możliwe światy są w semantyce intuicjonizmu zbędne. Przedstawiona niżej semantyka operuje tylko jednym rodzajem bytów – obiektami dziedziny interpretacji[6].

Niech $\boldsymbol{D}$ będzie rodziną zbiorów częściowo uporządkowaną przez relację inkluzji. Dziedziną interpretacji będzie wówczas zbiór $\boldsymbol{D} = \bigcup\{D;\ D \in \boldsymbol{D}\}$. Każdy ze zbiorów $D \in \boldsymbol{D}$ jest odpowiednikiem dziedziny interpretacji związanej z możliwym światem w semantyce Kripkego.

Niech $SEQ(D)$ będzie zbiorem tych ciągów nieskończonych elementów zbioru D, takim że $SEQ(D) = D^{\omega} - \bigcup\{D'^{\omega};\ D' \in \boldsymbol{D},\ D \not\subseteq D'\}$, gdzie ω jest zbiorem liczb naturalnych. Jak widać wszystkie zbiory $SEQ(D)$ są rozłączne, a zatem każdy ciąg s należy do jednego zbioru $SEQ(D)$. Zatem każdy ciąg jednoznacznie reprezentuje zbiór $SEQ(D)$, do którego należy, wskazując tym samym na odpowiedni możliwy świat. Niech $SEQ(\boldsymbol{D}) = \bigcup\{SEQ(D),\ D \in \boldsymbol{D}\}$.

Niech $[s]$ będzie zbiorem wszystkich obiektów występujących w ciągu $s \in SEQ(D)$. Zbiór $[s]$ nie musi być elementem rodziny $\boldsymbol{D}$, ale jest podzbiorem D. Jak łatwo pokazać dla dowolnych ciągów s i s' ze zbioru $SEQ(\boldsymbol{D})$ oraz dowolnego $D \in \boldsymbol{D}$, jeżeli $[s] \subseteq [s'] \subseteq D$ i $s \in SEQ(D)$, to $s' \in SEQ(D)$.

Zdefiniujmy relacje zachodzące między ciągami. Będą one zależały do skończonych podzbiorów $\boldsymbol{V}$ zbioru liczb naturalnych. Niech $s \in SEQ(D)$ i $s' \in SEQ(D')$, $D, D' \in \boldsymbol{D}$.

1) $s \approx_V s'$ wtw, gdy $D = D'$ i dla dowolnego $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$,
2) $s <_V s'$ wtw, gdy $D \subset D'$ i dla dowolnego $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$,
3) $s \leq_V s'$ wtw, gdy $D \subseteq D'$ i dla dowolnego $i \in \boldsymbol{V}$, $pr_i(s) = pr_i(s')$

gdzie $pr_i(s)$ oznacza i-ty element ciągu s.

Zbiory $\boldsymbol{V}$ będą rozumiane albo jako zbiory indeksów zmiennych w formułach języka, albo jako same zbiory zmiennych. Jeżeli $\boldsymbol{V}$ jest zbiorem pustym, to będziemy pomijać indeks „$\boldsymbol{V}$". Zauważmy, dla dowolnego zbioru $\boldsymbol{V}$ relacja $\leq_V$ jest **zwrotną** i **przechodnią** relacją częściowego porządku w $SEQ(\boldsymbol{D})$ oraz, że relacja $\approx_V$ zawiera się w relacji $\leq_V$. Relacja $\approx$ (dla pustego V) jest relacją równoważnościową w $SEQ(\boldsymbol{D})$.

---

[6] Por. Maciaszek [1999].

Strukturą sekwencyjną $\boldsymbol{F}$ będziemy nazywać parę $<SEQ(\boldsymbol{D}), \{\leq_V: \boldsymbol{V}$ jest skończonym podzbiorem $\omega\}>$, a **modelem sekwencyjnym** $\boldsymbol{M}$ będziemy nazywać parę $<s, \boldsymbol{F}>$, gdzie $s \in SEQ(\boldsymbol{D})$. Każdej strukturze $\boldsymbol{F}$ przyporządkowujemy zbiór **funkcji interpretacyjnych**. Dla każdego modelu $\boldsymbol{M} = <s, \boldsymbol{F}>$, gdzie $s \in SEQ(D)$ i $D \in \boldsymbol{D}$, każda funkcja interpretacyjna I_F przyporządkowuje:

1) zmiennym indywiduowym elementy D,
2) predykatom n-argumentowym podzbiory D^n,
3) formulom 0 lub 1.

Jeżeli ξ jest korelatem semantycznym przyporządkowanym wyrażeniu α przez funkcję interpretacyjną I_F dla ciągu s, to będziemy pisać $I_F(\alpha)(s) = \xi$. W szczególności dla dowolnego P^n i dowolnego n-elementowego zbioru zmiennych $\{x_{i1}, ..., x_{in}\}$, $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = 1$ wtw, gdy $<I_F(x_{i1})(s), ..., I_F(x_{in})(s)> \in I_F(P^n)(s)$, dla dowolnego $s \in SEQ(\boldsymbol{D})$.

Wprowadźmy „intuicjonistyczne ograniczenia” na klasę dopuszczalnych funkcji interpretacyjnych:

1. Dla zmiennej x_i, $I_F(x_i)(s) = pr_i(s)$ dla dowolnego $s \in SEQ(\boldsymbol{D})$;
2. Dla predykatu P^n i ciągów $s, s' \in SEQ(\boldsymbol{D})$:
   jeżeli $s \approx s'$, to $I_F(P^n)(s) = I_F(P^n)(s')$,
   jeżeli $s \leq s'$, to $I_F(P^n)(s) \subseteq I_F(P^n)(s')$;
3. Dla symbolu zdaniowego p_i i dowolnych ciągów $s, s' \in SEQ(\boldsymbol{D})$:
   jeżeli $s \approx s'$, to $I_F(p_i)(s) = I_F(p_i)(s')$,
   jeżeli $s \leq s'$, to $I_F(p_i)(s) \leq I_F(p_i)(s')$.

Zauważmy, że dla dowolnego predykatu P^n i dowolnego n-argumentowego zbioru zmiennych $V = \{x_{i1}, ..., x_{in}\}$, jeżeli $s \approx_V s'$, to $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s')$ i jeżeli $s \leq_V s'$ i $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s) = 1$, to $I_F(P^n(x_{i1}, ..., x_{in}))(s') = 1$. Ponadto jeżeli $I_F(\phi)(s) = 1$, to dla każdego s' takiego, że $s \leq_{FV(\phi)} s'$, $I_F(\phi)(s') = 1$, gdzie $\boldsymbol{FV}(\phi)$ jest zbiorem indeksów zmiennych wolnych w ϕ.

Dla *znaków logicznych* wprowadza się następujące ograniczenia na klasę funkcji interpretacyjnych:

1) $I_F(\varphi \wedge \psi)(s) = 1$ wtw, gdy $I_F(\varphi)(s) = 1$ i $I_F(\psi)(s) = 1$,
2) $I_F(\varphi \vee \psi)(s) = 1$ wtw, gdy $I_F(\varphi)(s) = 1$ lub $I_F(\psi)(s) = 1$,
3) $I_F(\neg\varphi)(s) = 1$ wtw, gdy dla każdego s' takiego, że $s \leq_{FV(\varphi)} s'$, $I_F(\varphi)(s') = 0$,
4) $I_F(\varphi \Rightarrow \psi)(s) = 1$ wtw, gdy dla każdego s' takiego, że $s \leq_{FV(\varphi)\cup FV(\psi)} s'$,
5) $I_F(\varphi)(s') = 0$ lub $I_F(\psi)(s') = 1$,
6) $I_F(\forall x_i\varphi)(s) = 1$ wtw, gdy dla każdego s' takiego, że $s \leq_{FV(\forall xi\varphi)} s'$, $I_F(\varphi)(s') = 1$,
7) $I_F(\exists x_i\varphi)(s) = 1$ wtw, gdy dla pewnego s' takiego, że $s \approx_{FV(\exists xi\varphi)} s'$, $I_F(\varphi)(s') = 1$.

Wymienione reguły spełniania dla formuł ze stałymi intuicjonistycznymi stają się regułami spełniania dla formuł ze stałymi klasycznymi, gdy rodzina D składać się będzie z jednego zbioru. Zatem logika klasyczna stanowi, z tego punktu widzenia, szczególny przypadek logiki intuicjonistycznej. Ponieważ reguły spełniania dla formuł ze stałymi intuicjonistycznymi zapewniają zachodzenie warunku inwariantności tych stałych w postaci podanej przez McCarthy'go, to intuicjonistyczny rachunek predykatów spełnia „globalne" kryterium logiczności.

LOGICZNOŚĆ WYRAŻEŃ ARYTMETYCZNYCH I TEORIOMNOGOŚCIOWYCH

Semantycznym kryteriom logiczności można niekiedy postawić pozorny zarzut sprzeczności. Okazuje się, że liczebniki w języku jednej teorii spełniają kryterium semantyczne, a liczebniki w języku innej teorii owego kryterium nie spełniają. Oczywiście ze względu na cząstkowy charakter definicji logiczności nie mamy tu do czynienia z rzeczywistą sprzecznością, gdyż w pierwszym przypadku nie wyklucza się logiczności liczebników, a w drugim przypadku stwierdza się ich pozalogiczność. Jednak fakt, że to samo kryterium może prowadzić do rozbieżnych rezultatów wart jest bliższego rozpatrzenia.

Pierwowzorem pojęć arytmetycznych w języku naturalnym są liczebniki oraz nazwy prostych operacji na niewielkim zbiorze liczb, które kompetentny użytkownik języka jest w stanie wykonać bez odwoływania się do specjalnej wiedzy matematycznej. Niektóre terminy ściśle arytmetyczne, włączone do języka teorii zwanej arytmetyką, stanowią *explicata* owych „przednaukowych" wyrażeń języka naturalnego. Arytmetyka może być podana w postaci systemu aksjomatycznego w języku pierwszego rzędu, np. w popularnej aksjomatyzacji Peano lub wyprowadzona z teorii typów Russella. W pierwszym przypadku liczby naturalne, nie zaś liczebniki, które są oznaczającymi je wyrażeniami językowymi, rozumiane są jako specjalne obiekty. Dziedzina interpretacji składa się zatem z obiektów „zwykłych" oraz obiektów „specjalnych" denotujących liczebniki. W przypadku arytmetyki wprowadzanej w ramach teorii typów, liczby utożsamiane są z klasami zbiorów równolicznych. Pozornie może się wydawać, że liczebniki w sensie Peano nie są inwariantne, natomiast liczebniki jako nazwy klas równolicznych spełniają warunek inwariantności. Innymi słowy liczebniki Peano nie są wyrażeniami logicznymi w myśl definicji semantycznej, a logiczność liczebników jako nazw klas zbiorów równolicznych nie jest przez tę definicję wykluczona. Czy zatem liczebniki są wyrażeniami logicznymi w sensie semantycznym? Można oczywiście utrzymywać, że mamy do czynienia z dwiema różnymi teoriami, w których występują zupełnie inne wyrażenia, zwyczajowo jedynie oznaczane za pomocą tych samych symboli. W takim przypadku poruszony problem istnieje tylko pozornie.

Możliwy jest jednak pogląd odmienny, gdyż można twierdzić, że dwie wymienione teorie lub przynajmniej ich fragmenty są równoważne, a występujące w nich liczebniki są *de facto* tymi samymi symbolami, interpretowanymi jednak w innej semantyce. W takim przypadku można na podstawie kryterium semantycznego utrzymywać, że liczebniki są wyrażeniami pozalogicznymi. Rozwiązanie to zasługuje na miano „antylogistycznego". Inna możliwość polega na rewizji sposobu rozumienia kryterium semantycznego dla liczebników zdefiniowanych w systemie Peano. Rozwiązanie to, które zasługuje na miano „logistycznego", polega na takim ograniczeniu klasy permutacji dziedzin interpretacji lub bijekcji jednej dziedziny na drugą, aby denotacje liczebników Peano odwzorowywane były zawsze same na siebie. Podkreśla to platoński charakter liczb, jako obiektów o specjalnym statusie ontologicznym, polegającym na tym, że dla każdego liczebnika istnieje jedyny obiekt, ten sam we wszystkich dziedzinach interpretacji i niezmienniczy ze względu na wszelkie permutacje i bijekcje tych dziedziny. Osłabienie kryterium semantycznego polega na zastąpieniu klasy wszystkich permutacji lub bijekcji dziedzin interpretacji, klasą permutacji lub bijekcji dopuszczalnych.

Zarzut pozornej sprzeczności może również dotyczyć kryterium językowego. Dla dalszych rozważań przydatne będzie wprowadzenie pewnego fragmentu „skończonej arytmetyki", którego konstrukcja wzorowana jest na tzw. arytmetyce przedimków Keenana i Falza[7]. Owa namiastka arytmetyki zbudowana będzie, podobnie jak arytmetyka Peano, w języku pierwszego rzędu z predykatem identyczności. Odpowiednikami liczebników w naszej teorii będą kwantyfikatory numeryczne w sensie Mostowskiego definiowalne w języku pierwszego rzędu, np. *co najmniej* 0 ($0_{\leq}$), *co najmniej* 1 ($1_{\leq}$), *co najmniej* 2 ($2_{\leq}$), itd. Ich denotacjami będą, podobnie jak w teorii typów, klasy zbiorów. Na początku zdefiniujmy kwantyfikatory *dokładnie* 0 (0!), *dokładnie* 1 (1!), *dokładnie* 2 (2!) itd.

$$(0!)(x)A(x) =_{df} \neg(\exists x)A(x)$$
$$(1!)(x)A(x) =_{df} \forall y(A(y) \Rightarrow x = y)$$
$$(2!)(x)A(x) =_{df} \forall z\forall y(A(y) \wedge A(z) \wedge y \neq z \Rightarrow x = y \vee x = z), \text{ itd.}$$

Następnie zdefiniujmy kwantyfikator *co najmniej* 0:

$$(0_{\leq})(x)A(x) =_{df} (\exists x)A(x) \vee \neg(\exists x)A(x)$$

Kwantyfikator *co najmniej* 1 jest to „zwykły" kwantyfikator $\exists$, który można jednak wyrazić za pomocą kwantyfikatorów *co najmniej* 0 *i dokładnie* 0:

$$(1_{\leq})(x)A(x) = \exists xA(x) = (0_{\leq})(x)A(x) \wedge \neg(0!)(x)A(x) = \neg(0!)(x)A(x)$$

[7] Por. Keenan i Falz [1985].

Podobnie kwantyfikator *co najmniej* 2 można zdefiniować jako:

$(2_{\leq})(x)A(x) = (1_{\leq})(x)A(x) \wedge \neg(1!)(x)A(x) = \neg(0!)(x)A(x) \wedge \neg(1!)(x)A(x)$.

Ogólnie, kwantyfikator *co najmniej* $(n + 1)$ definiuje się jako koniunkcję kwantyfikatora *co najmniej n* i negacji kwantyfikatora *dokładnie n*, jako koniunkcję negacji kwantyfikatorów od *dokładnie zero*, do *dokładnie n* lub jako negację alternatywy kwantyfikatorów od *dokładnie zero*, do *dokładnie n*. Weźmy pod uwagę kwantyfikatory $n_{\leq}$ i $m_{\leq}$:

$(n_{\leq})(x)A(x) = \neg(0! \vee ... \vee (n-1)!)(x)A(x)$
$(m_{\leq})(x)A(x) = \neg(0! \vee ... \vee (m-1)!)(x)A(x)$

Operacja „dodawania” kwantyfikatorów zdefiniowana jest w następująco:

$(n_{\leq} + m_{\leq})(x)A(x) = [\neg(0! \vee ... \vee (n-1)!) \wedge \neg((0+n)! \vee ... \vee ((m-1)+n)!)](x)A(x) \equiv [\neg(0! \vee ... \vee (n-1)! \vee (\mathrm{n})! \vee ... \vee ((n+m)-1)!)](x)A(x)$

Zauważmy, że ostatnia formuła jest równoważna formule $(n + m)_{\leq}(x)A(x)$, zatem $(n_{\leq} + m_{\leq})(x)A(x) = (n + m)_{\leq}(x)\, A(x)$, a w szczególności $(5_{\leq} + 7_{\leq})(x)A(x) = (12)_{\leq}(x)\, A(x)$.

Otrzymamy w ten sposób pewną namiastkę arytmetyki, w której kantowskie zdanie 5 + 7 = 12, a właściwie jego kwantyfikatorowy odpowiednik, jest nie tylko zdaniem analitycznym, ale zdaniem logicznie prawdziwym. Równoważności tego typu odpowiadają bowiem zależnościom między kwantyfikatorami numerycznymi definiowalnymi w logice pierwszego rzędu z predykatem identyczności. Na mocy definicji językowej nie daje się zatem wykluczyć logiczności liczebników rozumianych jako kwantyfikatory numeryczne. Oczywiście przedstawiona namiastka arytmetyki nie jest arytmetyką we właściwym tego słowa znaczeniu. Nie chodzi tu bynajmniej o brak odpowiedników pozostałych operacji arytmetycznych; można je bowiem do tej namiastki arytmetyki wprowadzić. Podstawowy niedostatek polega na tym, że bez nadmiernego wzbogacenia języka nie można sformułować w niej odpowiednika żadnego twierdzenia arytmetyki, w którym pojawia się kwantyfikowanie po zmiennych liczbowych. Cytowane definicje pozwalają bowiem generować dowolne równości matematyczne, w których nie występują zmienne.

W gramatyce kategorialnej Ajdukiewicza kwantyfikatory są kategorii $s/(s/n)$. Aby móc sformułować odpowiedniki twierdzeń ze zmiennymi liczbowymi, należy wprowadzić do języka namiastki arytmetyki zmienne kwantyfikatorowe. Predykat bycia liczebnikiem, a właściwie bycia kwantyfikatorem liczbowym, byłby kategorii $s/(s/(s/n))$. Z kolei kwantyfikatory, za pomocą których można kwantyfikować po liczbach, a właściwie po kwantyfikatorach liczbowych, byłyby wyrażeniami kategorii $s/(s/(s/(s/n)))$. Dopiero po wprowadzeniu takich wyrażeń można formułować w naszym języku twierdzenia arytmetyki nie będące odpowiednikami prostych równości typu 5 + 7 = 12, na przykład twierdzenie głoszące, że każdy kwantyfikator $n_{\leq}$ jest większy bądź równy $0_{\leq}$, czyli odpowiednik prostego twierdzenia $\forall n(n \geq 0)$. W tym przypadku wyszlibyśmy już jednak poza jednozakresowy język pierwszego rzędu, a zatem, zgodnie z definicją językową, odpowiednik wymienionego twierdzenia byłby pozalogiczny.

Na mocy kryterium językowego liczebniki w arytmetyce Peano są wyrażeniami pozalogicznymi. Oczywiście można uznać kwantyfikatory numeryczne typu $n_{\leq}$ za wyrażenia zupełnie innej teorii niż liczebniki w arytmetyce Peano i nie utożsamiać ich ze sobą. Załóżmy jednak, że rozszerzona namiastka arytmetyki jest równoważna arytmetyce Peano. Można jednoznacznie odrzucić logiczność zarówno liczebników Peano jak i kwantyfikatorów postaci $n_{\leq}$. Do takiego „antylogicystycznego" rozwiązania przychyliłby się prawdopodobnie sam Quine. Konsekwencją tego rozwiązania jest bowiem uznanie predykatu identyczności za predykat pozalogiczny. Przypomnijmy, że Quine nie mógł się zdecydować jaki status przypisać temu predykatowi.

Pozornie możliwe jest rozwiązanie, które można nazwać rozwiązaniem „umiarkowanie logicystycznym". Można mianowicie w taki sposób osłabić kryterium językowe, aby nie wykluczać logiczności liczebników Peano. W szczególności można uznać, że twierdzenia, w których istotną rolę pełnią wyróżnione stałe indywiduowe i operacje na tych stałych, formułowane języku jednozakresowym, tj. bez zmiennych liczbowych są twierdzeniami logicznymi. Przeciwko takiemu rozwiązaniu można jednak wysunąć nastepujący argument. Równości 5 + 7 = 12 nie da się dowieść w arytmetyce pierwszego rzędu bez powołania się na przynajmniej niektóre aksjomaty, które stanowią **definicje kontekstowe** liczebników, funkcji następnika i predykatu bycia liczba naturalną. Aksjomaty te rozróżniają, jak stwierdziliśmy poprzednio, dwa rodzaje zmiennych. Równość 5 + 7 = 12 ma bowiem sens, gdy 5, 7 i 12 są liczebnikami oznaczającymi liczby naturalne, nie są zaś dowolnymi stałymi indywiduowymi. Zupełnie inaczej jest w przypadku kwantyfikatorów typu *co najmniej n*, które mogą być definiowane w języku pierwszego rzędu za pomocą **definicji wyraźnych**.

Pozostają zatem dwa wyjścia: albo należy uznać, że liczebniki i symbole operacji w arytmetyce Peano nie są wyrażeniami logicznymi, a odpowiadające im kwantyfikatory typu *co najmniej n* i operacje definiowane na tych kwantyfikatorach są logiczne, albo odrzucić logiczność jednych i drugich, godząc się jednocześnie na uznanie, że predykat identyczności jest pozalogiczny. Można również być zwolennikiem podejścia „logicystycznego" i konsekwentnie nie uznawać kryterium językowego.

Pozorne niezgodności w stosowaniu definicji terminu „logiczny" występują również na gruncie teorii mnogości. Symbol $\in$, traktowany jako predykat teorii pierwszego rzędu, np. w aksjomatyce Zermelo–Fraenkla, nie jest inwariantny. Jeżeli nie poczyni się bowiem żadnych wstępnych założeń, w dziedzinie interpretacji znajdą się jednocześnie obiekty, jak i zbiory owych obiektów, co sprawia, że relacja będąca denotacją $\in$ nie jest niezmiennicza w przypadku permutacji dziedziny interpretacji lub bijekcji jednej dziedziny na drugą. Aksjomatyka teorii mnogości wprowadza zatem, podobnie jak aksjomatyka arytmetyki, pewne pozalogiczne rozróżnienie między obiektami dziedziny interpretacji, które sprawia, że predykat bycia zbiorem nie jest inwariantny. Jeżeli jednak posegmentujemy, podobnie jak w teorii typów, obiekty na odpowiednie typy semantyczne, np. elementy zbiorów, zbiory, klasy zbiorów, itp., relacja $\in$ między tymi obiektami staje się inwariantna. Podobnie jak w przypadku arytmetyki, kryterium inwariantności można zastosować dla semantyki systemu Zermelo-Fraenkla, pod warunkiem ograniczenia klasy dopuszczalnych permutacji i bijekcji dziedzin interpretacji. Rozpatrzmy dziedzinę $D = \{a, b\}$. W ramach teorii typów konstruuje się z obiektów a i b zbiory, zbiory zbiorów, itd. Inwariantna relacja $\in$ składa się z następujących par: $<a,\{a\}>$, $<b,\{b\}>$, $<a,\{a, b\}>$, $<b,\{a, b\}>$ oraz z nieskończenie wielu par składających się ze zbioru i zbioru zbiorów, itd. Ponieważ w teorii mnogości jako teorii pierwszego rzędu nie rozróżnia się typów obiektów w dziedzinie interpretacji, to w naszym przypadku dziedziną D' będzie nieskończony zbiór $\{a, b, c, d, e, ...\}$, gdzie $c = \{a\}$, $d = \{b\}$, zaś $e = \{a, b\}$. Podejście „antylogicystyczne" polega na uznaniu predykatu $\in$ za predykat pozalogiczny. Jeżeli jednak pragniemy „wymusić" inwariantność dwuargumentowego predykatu $\in$ o denotacji $\{<a\ c>, <a,e\ >, <b,d>, <b,e>, ...\}$, to możemy uznać za dopuszczalne jedynie dwie permutacje dziedziny interpretacji: przekształcenie identycznościowe oraz funkcję f taką, że $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$, $f(d) = c$, $f(e) = e$, ... Podejście to zasługuje na nazwę „logicystycznego".

Przyjrzyjmy się konsekwencjom zastosowania kryterium językowego do predykatu $\in$. W tym celu rozpatrzmy trzy wybrane definicje tego predykatu:

1. W pozornej teorii klas Quine'a wyrażenie $y \in \{x: F(x)\}$ zastępuje formułę $F(y)$ w języku pierwszego rzędu;
2. W ogólnej teorii klas predykat $\in$ oznacza relację, która może zachodzić dla wyrażeń odpowiednio typów t oraz (t) w języku teorii typów i jest zdefiniowany kontekstowo przez aksjomaty **ekstensjonalności** i **istnienia klas**;
3. Predykat ten również może być zdefiniowany kontekstowo przez aksjomaty (np. Zermelo–Fraenkla) w języku pierwszego rzędu.

Jeżeli, jak postulował Quine, umówimy się pisać $x \in F$ zamiast $F(x)$, to pozostaniemy na gruncie logiki pierwszego rzędu, zwanej przez Quine'a pozorną teorią klas lub „logiką w wilczej skórze", zaś $\in$ rozumiany będzie jako funkcja aplikacji argumentu x do funktora F. Byłby to zatem niewątpliwie znak logiczny w sensie Reichenbacha, rozumiany jako wyrażenie ekspresywne w ujęciu syntaktycznym. „Logika w wilczej skórze" nie jest teorią mnogości, dla tego że nie pozwala, podobnie jak przedstawiona wcześniej namiastka arytmetyki, na formułowanie wielu istotnych twierdzeń o zbiorach. Należy zatem albo uznać, że logiczny predykat $\in$ w pozornej teorii klas jest czymś innym niż predykat $\in$ w teorii mnogości Zermelo-Fraenkla oraz teorii klas, albo wykluczyć logiczność predykatu $\in$ w każdym z trzech przypadków.

CHWIEJNOŚĆ ZNACZENIOWA POTOCZNEGO POJĘCIA LOGICZNOŚCI

Celem przykładów przedstawionych w poprzednim paragrafie było zwrócenie uwagi na trudności, na które napotykamy, gdy chcemy wyznaczyć granice logiki. Pierwsza trudność bierze się stąd, że pewne wyrażenia, które intuicyjnie znaczą „to samo" występują w różnych teoriach. W tym miejscu należy zaznaczyć, że termin „teoria" nie zawsze był w tej książce rozumiany w swym podstawowym znaczeniu jako zbiór twierdzeń domknięty ze względu na operacje wynikania. Często był używany intuicyjnie jako zbiór twierdzeń „o czymś". Teorią w tym sensie była przedstawiona wcześniej namiastka arytmetyki. Aby można było mówić o tożsamości kwantyfikatorów numerycznych i liczebników[8], należałoby rozszerzyć namiastkę arytmetyki kwantyfikatorów do „teorii kwantyfikatorów numerycznych", która byłaby równoważna arytmetyce. Gdyby po zastosowaniu któregoś z kryteriów logiczności do wyrażeń „teorii kwantyfikatorów numerycznych" i wyrażeń arytmetyki wystąpiła niezgodność, antylogicysta uznałby pozalogiczność jednych i drugich. Inne rozwiązanie, które można nazwać „umiarkowanie logicystycznym" polega na pewnej modyfikacji lub „rozluźnieniu" wymogów kryterium definicyjnego. Przykładem takiego podejścia może być ograniczenie klasy dopuszczalnych permutacji dziedzin interpretacji do przekształceń tożsamościowych dla liczb definiowanych w aksjomatyce Peano.

Druga trudność, związana z poprzednią, bierze się z tego, że chcąc zdefiniować predykat „logiczny" odwołujemy się do niejasnych intuicji wiązanych z odpowiednikami wyrażeń pewnych teorii w języku naturalnym. Jak

---

[8] W gramatykach kategorialnych zachodzi ogólna prawidłowość zwana prawem Montague: $n \to s / (n \backslash s)$. Zgodnie z tym prawem każda stała indywiduowa jest w pewnym sensie kwantyfikatorem., por. Buszkowski [1989]. W rozdziale piątym staraliśmy się pokazać, że funkcja składniowa imion własnych jest taka sama jak funkcja składniowa fraz rzeczownikowych.

pokazaliśmy w poprzednich paragrafach, ścisłe pojęcie logiczności jest względne. Zależy ono od sposobu zdefiniowania teorii i od arbitralnego sposobu wyeksplikowania pojęć przejrzystości, niezależności tematycznej i uniwersalności. Intuicyjne pojęcie logiczności rozumiemy jednak w sposób absolutny. Na poziomie języka potocznego nie operujemy bowiem teoriami, lecz mamy niekiedy niejasne pojęcie spójnika, kwantyfikatora, liczby czy modalności. Sposób wprowadzenia teorii uwydatnia zawsze pewien aspekt owej absolutnej logiczności. Może być to aspekt semantyczny, językowy lub teoriodowodowy. W intuicyjnym rozumieniu pojęcia logiczności wymienione aspekty są nierozdzielne. Naszkicowana w tym rozdziale startegia budowania kryterium globalnego stanowi próbę zbliżenia się do tego pojęcia.

Podsumowując należy zauważyć, że przedstawiona propozycja nie likwiduje problemu arbitralności kryteriów logiczności rozumianej w sensie ścisłym. Owa arbitralność jest szczególnie widoczna w przypadku kryterium teoriodowodowego, w którym występowały dwa konkurencyjne sposoby eksplikowania pojęcia „zachowywania niezależności tematycznej”, pochodzące od Hackinga i od Došena. Źródłem tej arbitralności, co starałem się pokazać, jest chwiejność znaczeniowa potocznego pojęcia logiczności i wszystkich pojęć pochodnych. Pozostaje to w zgodzie ze znamiennymi słowa Alfreda Tarskiego z artykułu *O pojęciu wynikania logicznego*:

> Osobiście nie dziwiłbym się jednak i wówczas, gdyby wynik tych badań miał być zdecydowanie negatywny i gdyby, co za tym idzie, okazała się konieczność traktowania takich pojęć, jak wynikanie logiczne, zdanie analityczne lub tautologia jako pojęć relatywnych, które muszą być odniesione do jakiegoś określonego, ale w szerszym lub węższym zakresie dowolnego podziału wyrazów języka na logiczne i pozalogiczne; dowolność tego podziału byłaby w pewnej mierze odbiciem owej chwiejności, która daje się zaobserwować w użyciu pojęcia wynikania na gruncie mowy potocznej[9].

Podział wyrażeń języka na logiczne i pozalogiczne nie jest, co starałem się pokazać, całkowicie dowolny. Można bowiem konstruować kryteria cząstkowe, które łącznie przybliżają zakres terminu „znak logiczny” tak, aby pozostał on w maksymalnym stopniu w zgodzie z naszymi intuicjami. Pojęcie wynikania logicznego pozostanie jednak, jak twierdził Tarski, do pewnego stopnia pojęciem względnym.

[9] Tarski [1935], s. 202.