ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA PHILOSOPHICA 3, 1985

Резо Григолия

О ФОРМУЛАХ m-ПЕРЕМЕННЫХ В ИСЧИСЛЕНИЯХ ЛУКАСЕВИЧА

Многими авторами были описаны структуры неэквивалентных формул $m(1 \leq m < \aleph_0)$ переменных в данном пропозициональном исчислении. Множество неэквивалентных формул m переменных в некотором пропозициональном исчислении может быть конечным или бесконечным. И. Нишимурой в [1] и Л. Ригером в [2] были даны бесконечная последовательность всех неэквивалентных формул одной переменной в интуиционистском исчислении, другими словами - свободная псевдобулева алгебра с одним свободным образующим (лестница Ригера-Нишимуры) является бесконечной. Уркхартом в [3] описаны свободные псевдобулевы алгебры с m свободными образующими. А. Хорном в [4] описаны свободные L-алгебры, соответствующие логике Даммета LC. Г. Эпштейном и А. Хорном в [5] описаны свободные P- алгебры с m свободными образующими; другими словами описана структура всех неэквивалентных формул m переменных в пропозициональном исчислении, соответствующем линейному фрагменту логики HB [6]. Свободная P-алгебра с m свободными образующими является конечной [5]. Свободные алгебры Поста описаны Цвингером в [7]. В [8] описаны структуры неэквивалентных формул одной переменной в модальных исчислениях S4.3 и D^*. В [9] описана свободная D^*-алгебра с m свободными образующими. В. Шехтманом в [10] описаны свободные S4-алгебры (алгебры с замыканием) и Grz-алгебра (алгебры, соответствующие модальной логике K.1.1). В [11] описана свободная SD^*-алгебра с одним свободным образующим. SD^*-алгебры, являющиеся подклассом алгебр с сопряженными замыканиями [12], являются алгебраическими моделями для бимодальной логической системы LinTGrz сформулированной К. Сегербергом в [13].

Алгебраическими моделями для бесконечнозначной логики Лукасевича $L_{\aleph_0}$ служат MV-алгебры Чэна [14]. MV_n-алгебры служат алгебраическими моделями для n-значных логик Лукасевича $L_n (2 < n < \aleph_0)$ [15]. Целью данной работы является описание структуры всех неэквивалентных формул m переменных в $L_n (2 < n < \aleph_0)$ и $L_{\aleph_0}$. Описание структуры всех формул m переменных в $L_{\aleph_0}$ (соответственно в L_n) равносильно описанию свободной MV-алгебры (соответственно MV_n-алгебры) с m свободными образующими. Как будет показано ниже свободная MV_n-алгебра с m свободными образующими является конечной, а свободная MV-алгебра с m свободными образующими является бесконечной.

Статья состоит из трех частей. Первая часть посвящена предварительным понятиям и необходимым фактам, вторая часть – свободным MV_n-алгебрам с m свободными образующими, третья часть – свободным MV-алгебрам с m свободными образующими.

1. Предварительные понятия и необходимые факты

MV-алгебра есть универсальная алгебра $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$, где A – непустое множество элементов, 0 и 1 – различные фиксированные элементы из A, $+$ и $\cdot$ являются бинарными операциями на A и $-$ есть унарная операция на A, удовлетворяющие перечисленным ниже аксиомам:

$\mathcal{L}1.$ $x + y = y + x$ $\qquad x \cdot y = y \cdot x$

$\mathcal{L}2.$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ $\qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

$\mathcal{L}3.$ $x + \bar{x} = 1$ $\qquad x \cdot \bar{x} = 0$

$\mathcal{L}4.$ $x + 1 = 1$ $\qquad x \cdot 0 = 0$

$\mathcal{L}5.$ $x + 0 = x$ $\qquad x \cdot 1 = x$

$\mathcal{L}6.$ $\overline{[x + y]} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ $\qquad \overline{[x \cdot y]} = \bar{x} + \bar{y}$

$\mathcal{L}7.$ $\bar{\bar{x}} = x$

$\mathcal{L}8.$ $\bar{0} = 1$

$\mathcal{L}9.$ $x \vee y = y \vee x$ $\qquad x \wedge y = y \wedge x$

$\mathcal{L}10.$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ $\qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$\mathcal{L}11.$ $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$ $\qquad x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$,

где $x \vee y = (x \cdot \bar{y}) + y$, $x \wedge y = (x + \bar{y}) \cdot y$;

$(m+1)\, x = mx + x$, $x^0 = 1$, $x^{m+1} = x^m \cdot x$.

Алгебра $\mathcal{A} = \langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ является MV_n-алгеброй $(2 \leq n < \aleph_0$

если $\mathfrak{A}$ является MV-алгеброй и дополнительно выполняются следующие аксиомы:

$\mathfrak{L}12$. $(n-1)x+x=(n-1)x$, $x^{n-1}\cdot x=x^{n-1}$.

При $n>3$.

$\mathfrak{L}13$. $[(jx)\cdot(\bar{x}+{}^{-}[(j-1)x])]^{n-1}=0$, $(n-1)[x^j+({}^{-}[x^{j-1}]\cdot\bar{x})]=1$,

где $1<j<n-1$ и j не делит $n-1$.

Примером MV-алгебры служит алгебра $\mathfrak{L}_{\aleph_0}=\langle R,+,\cdot,-,0,1\rangle$, где R-множество всех рациональных чисел между 0 и 1, включая 0 и 1 для $\forall x,y\in R$ $x+y=\min(1,x+y)$, $x\cdot y=\max(0,x+y-1)$, $\bar{x}=1-x$. Примером MV_n-алгебры служит алгебра $\mathfrak{L}_n=\langle R_n,+,\cdot,-,0,1\rangle$, где $R_n=\{0,1/n-1,\ldots,n-2/n-1,1\}$, для $\forall_{x,y}\in R_n$ $x+y=\min(1,x+y)$, $x\cdot y=\max(0,x+y-1)$, $\bar{x}=1-x$.

Как видим, классы MV-алгебр и MV_n-алгебр являются многообразиями (эквациональными классами), т.е. классами, замкнутыми относительно прямых произведений П, подалгебр S и гомоморфных образов Н. Многообразие всех MV-алгебр (MV_n-алгебр) обозначим через $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_n$).

Теорема 1. [14]. $\mathfrak{M}=HS\Pi\{\mathfrak{L}_n\}$ $n=2,3,\ldots$

Теорема 2. [15]. $\mathfrak{M}_n=HS\Pi\,\mathfrak{L}_n$.

Теорему 1 (Теорему 2) можно сформулировать следующим образом: многообразие $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_n$) порождается семейством $\{\mathfrak{L}_n\}$ (алгеброй $\mathfrak{L}_n$) $n=2,3,\ldots$

Теорема 3. [15]. Алгебра $\mathfrak{L}_k$ $(2\leqslant k<\aleph_0)$ изоморфна подалгебре алгебры $\mathfrak{L}_n$ $(2\leqslant n<\aleph)$ тогда и только тогда, когда $k-1$ делит $n-1$.

Из этой теоремы получаем, что $\mathfrak{L}_2$, являющаяся двухэлементной булевой алгеброй, является подалгеброй всякой алгебры $\mathfrak{L}_n$.

2. Свободные MV_n-алгебры с m свободными образующими

Свободную алгебру в многообразии $\mathfrak{M}_n$ обозначим посредством $F_m^{(n)}$. В качестве элементов алгебры $F_m^{(n)}$ можно взять различные m-местные функции алгебры $\mathfrak{L}_n$ (поскольку $\mathfrak{L}_n$ порождает многообразие $\mathfrak{M}_n$). Согласно Мак-Нотону [16] m-местная функция f принадлежит алгебре $\mathfrak{L}_n$ тогда и только тогда, когда для каждого набора $(\delta_1/n-1,$

$\ldots, S_m/n-1)$, $0 \leqslant S_m \leqslant n-1$, всякий общий делитель чисел $S_1, \ldots, S_m, n-1$ является делителем S, где $S/n-1 = f\,(S_1/n-1, \ldots, S_m/n-1)$.

На множестве $\{n : 2 \leqslant n < \aleph_0\}$ определим функцию $\vartheta_m(k)$ следующим образом: $\vartheta_m(2) = 2^m$, $\vartheta_m(3) = 3^m - 2^m$, $\vartheta_m(n) = n^m - (\vartheta_m(i_1) + \ldots + \vartheta_m(i_k))$, где $i_1 - 1, \ldots, i_k - 1$ – все делители числа $n-1$, отличные от $n-1\}$.

Число различных m-последовательностей (т. е. элементов из $\mathcal{L}_n^m$) равно n^m. Функция f алгебры $\mathcal{L}_n$ принимает определенные значения из $\mathcal{L}_n$. Поскольку $\mathcal{L}_2$ является подалгеброй всякой алгебры $\mathcal{L}_n$, то произвольная m-местная функция алгебры $\mathcal{L}_n$ на m-последовательностях, компонентами которых являются элементы из $\mathcal{L}_2$, принимает значение из $\mathcal{L}_2$, т. е. либо 0, либо 1. Число различных m-последовательностей из $\mathcal{L}_n^m$, компонентами которых являются элементы из $\mathcal{L}_2$, равно 2^m. А число различных функций алгебры $\mathcal{L}_n$, принимающие значения на этих m-последовательностях, равно 2^{2^m}. Если $n-1$ – простое число, то число различных m-местных функций алгебры $\mathcal{L}_n$ равно $2^{2^m} \cdot n^{(n^m - 2^m)}$. Пусть $n-1$ – не простое число. Выпишем числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ в порядке увеличения, где $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_k - 1$ – все делители числа $n-1$ ($n_1 = 2$, $n_k = n$). Ясно, что алгебры $\mathcal{L}_{n_1}, \ldots, \mathcal{L}_{n_k}$ изоморфны соответствующим подалгебрам алгебры $\mathcal{L}_n$ (в дальнейшем изоморфные элементы будем отождествлять). Поэтому произвольная m-местная функция алгебры $\mathcal{L}_n$ на m-последовательностях, компонентами которых являются элементы из $\mathcal{L}_{n_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ принимает значения из $\mathcal{L}_{n_i}$. Принимая это во внимание, имеем, что число различных m-местных функций алгебры $\mathcal{L}_n$ равно $n_1^{\vartheta_m(n_1)} \cdot \ldots \cdot n_k^{\vartheta_m(n_k)}$.

Упорядочим элементы $F_m^{(n)}$ следующим образом: для любых $f, g \in F_m^{(n)}$ $f \leqslant g$ если и только если $f(a_1, \ldots, a_m) \leqslant g(a_1, \ldots, a_m)$ для всех $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{L}_n$. Поэтому множество элементов алгебры $F_m^{(n)}$ можно представить в виде диаграммы. В классе $\mathfrak{M}_3$ множество элементов алгебры $F_1^{(3)}$ имеет диаграмму, изображенную на рис. 1.

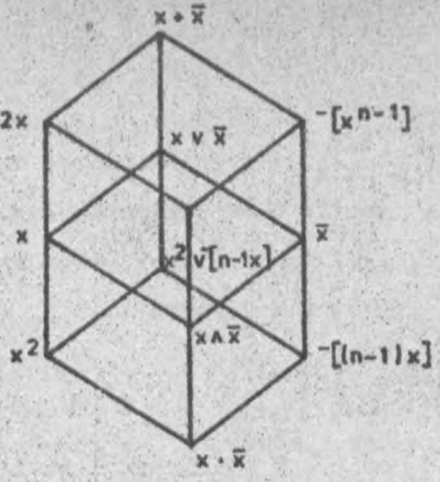

Рис. 1

Р. Григолия, О формулах m-переменных в исчислениях Лукасевича

Линейно упорядочим элементы $\mathcal{L}_n^m$ некоторым образом. Для произвольного элемента $f \in F_m^{(n)}$ каждой m-последовательности $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{L}_n^m$ сопоставим элемент $f(a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{L}_n$. Тогда функции f сопоставится n^m-последовательность, компоненты которой принадлежат $\mathcal{L}_n$. Отождествим функцию f с такой n^m-последовательностью. Тогда, как видим $F_m^{(n)}$ изоморфна алгебре $\mathcal{L}_{n_1}^{\vartheta_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{\vartheta_m(n_k)}$.

Рассмотрим множество $\{A = a : a \in \mathcal{L}_n^m \;\&\; a \notin \mathcal{L}_{n_i}^m,\ i = 1, \ldots, k;$ $n_1-1, \ldots, n_k-1$ – все делители числа $n-1$, отличные от $n-1\}$. Легко видеть, мощность множества A равняется $\vartheta_m(n)$. Перенумеруем элементы из A: $a_1, \ldots, a_{\vartheta_m(n)}$. Обозначим через $g_k^{(n)}$ элемент $(\pi_k(a_1), \ldots, \pi_k(a_{\vartheta_m(n)})) \in \mathcal{L}_n^{\vartheta_m(n)}$, где π_k – проектирование на k-ый множитель алгебры $\mathcal{L}_n^m$. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
G_1^{(n)} &= (g_1^{(n_1)}, \ldots, g_1^{(n_k)}),\\
G_2^{(n)} &= (g_2^{(n_1)}, \ldots, g_2^{(n_k)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
G_m^{(n)} &= (g_m^{(n_1)}, \ldots, g_m^{(n_k)}),
\end{aligned}
$$

где $n_1-1, \ldots, n_k-1$ – все делители числа $n-1$ $(n_1 = 2,\ n_k = n)$. Ясно, что $G_k^{(n)} \in \mathcal{L}_{n_1}^{\vartheta_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{\vartheta_m(n_k)}$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Отметим, что для произвольного $n(2 \leq n < \aleph_0)$ элементы $g_1^{(n)}$, $g_2^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)}$ порождают алгебру $\mathcal{L}_n^{v_m(n)}$, а элементы $G_1^{(n)}$, $G_2^{(n)}, \ldots, G_m^{(n)}$ порождают алгебру $\mathcal{L}_{n_1}^{v_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{v_m(n_k)}$. Действительно, функциям $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ алгебры $\mathcal{L}_n$ соответствуют элементы $G_i^{(n)}(i = 1, \ldots, m)$ (с точностью до перестановок компонент). Но функции $f_i(i = 1, \ldots, m)$ являются свободными образующими алгебры $F_m^{(n)}$. Отсюда доказана

Теорема 4. Алгебра $\mathcal{L}_{n_1}^{v_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{v_m(n_k)}$ является свободной алгеброй в многообразии $\mathfrak{M}_n$ со свободными образующими $G_1^{(n)}, \ldots, G_m^{(n)}$, где $n_1 - 1, \ldots, n_k - 1$ - все делители числа $n - 1$ $(n_1 = 2, n_k = n)$.

3. Свободные MV-алгебры с m свободными образующими

Как и в предыдущем пункте пусть $A = \{a : a \in \mathcal{L}_n^m \;\&\; a \notin \mathcal{L}_{n_i}^m$, $i = 1, \ldots, k$; $n_1 - 1, \ldots, n_k - 1$ - все делители числа $n - 1$, отличные от $n - 1\}$. Перенумеруем элементы из $A : a_1, \ldots, a_{v_m(n)}$. Обозначим через $g_k^{(n)}$ элемент $(\pi_k(a_1), \ldots, \pi_k(a_{v_m(n)})) \in \mathcal{L}_n^{v_m(n)}$, $k = 1, \ldots, m$, где π_k - проектирование на k-ый множитель алгебры $\mathcal{L}_n^m$. Введем следующие обозначения:

$$G_1 = (g_1^{(2)},\ g_1^{(3)},\ g_1^{(4)}, \ldots),$$
$$G_2 = (g_2^{(2)},\ g_2^{(3)},\ g_2^{(4)}, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_m = (g_m^{(2)},\ g_m^{(3)},\ g_m^{(4)}, \ldots).$$

Ясно, что $G_i \in \prod\limits_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n^{v_m(n)}$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим подалгебру F_m алгебры $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n^{v_m(n)}$, порожденного элементами $G_1, \ldots, G_m$. Ясно, что алгебра F_m является счетной и, поэтому, собственной подалгеброй алгебры $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \mathcal{L}_n^{v_m(n)}$. Кроме того F_m является подпрямым произведением алгебр $\mathcal{L}_n^{v_m(n)} (n = 2, 3, \ldots)$, так как проекция $\pi_i(G_k) = g_k^{(i)}$ порождает алгебру $\mathcal{L}_i^{v_m(i)}$. Следовательно F_m является подпрямым произведением алгебр $\mathcal{L}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Теорема 5. Алгебра F_m является свободной алгеброй в многообразии $\mathfrak{M}$ со свободными образующими $G_1, \ldots, G_m$.

Доказательство. Ясно, что всякое равенство, записанное на m переменных, верное в $\mathfrak{M}$ верно и в F_m. Пусть равенство $\varphi = \Psi$, записанное на m переменных не верно в $\mathfrak{M}$. Тогда равенство $\varphi = \Psi$ не верно в некоторой алгебре $\mathcal{L}_k$ $(2 \leq k < \aleph_0)$. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – элементы, на которых опровергается равенство $\varphi = \Psi$. Породим подалгебру $\mathcal{L}_n$ алгебры $\mathcal{L}_k$ элементами $a_1, \ldots, a_m$ (ясно, что $n-1$ делит $k-1$). Существует гомоморфизм $h = h_2 \circ h_1$, где $h_1 = \pi_{n_1} \times \ldots \times \pi_{n_k}$, где $n_1 - 1, \ldots, n_k - 1$ – все делители числа $n-1$, π_{n_i} – проектирование на n_i-ый множитель, алгебра F_m на алгебру $\mathcal{L}_{n_1}^{\vartheta_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{\vartheta_m(n_k)}$, h_2 – гомоморфизм $\mathcal{L}_{n_1}^{\vartheta_m(n_1)} \times \ldots \times \mathcal{L}_{n_k}^{\vartheta_m(n_k)}$ на алгебру $\mathcal{L}_n$, причем $h_2(g_i^{(n_1)}, \ldots, g_i^{(n_k)}) = a_i$. Поэтому равенство $\varphi = \Psi$ опровергается в алгебре F_m на элементах $G_1, \ldots, G_m$. Следовательно алгебра F_m является свободной алгеброй в многообразии $\mathfrak{M}$ со свободными образующими $G_1, \ldots, G_m$.

Литература

[1] Nishimura I., On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus, J.S.L., 25 (1960), 327–331.

[2] Rieger L., A remark on the s.c. free closure algebras, "Czechoslovak Math. Journal", 82 (1957), 16-20.

[3] Urquhart A., Free heyting algebras, Alg. Univ., vol. 3/1 (1973), 94-97.

[4] Horn A., Free L-algebras, J.S.L., 34(1969), 475-480.

[5] Epstein G., Horn A., P-algebras, an abstraction from Post algebras, Alg. Univ., vol. 4, j.2 (1974) 195-206.

[6] Rauszer C., Semi-Boolean algebras and their application to intuitionistic logic with dual operations, Fund. Math., 83, N 3 (1974), 219-249.

[7] Dwinger Ph., Free Post algebras and coproducts of Post algebras Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 20 (1972), 535-537.

[8] Esakia L., R. Grigolia., Christmas trees. On

free cyclic algebras in some varieties of closure algebras, Bull. Sect. Log., Pol. Acad. Sci., 4, N 3 (1975), 95-102.

[9] Григолия Р., Свободные D^*-алгебры с конечным числом образующих, IV Всесоюзная конференция по математической логике, Кишинев 1976, стр. 34.

[10] Шехтман В. Б., Лестницы Ригера-Нишимуры, Докл. Акад. Наук., 241, № 6 1978, 1288-1291.

[11] Григолия Р., Свободная циклическая алгебра в эквациональном классе, соответствующем бимодальной системе LinTGrz, Логика, Семантика, Методология, Тбилиси 1978, "Мецниереба" 100-112.

[12] Эсакиа Л., Семантический анализ бимодальных (временных) логических систем, Логика, Семантика, Методология, Тбилиси 1978, "Мецниереба", 87-99.

[13] Segerberg K., Modal logic with linear alternativ relation, "Theoria", 36, N 3 (1970), 301-322.

[14] Chang C. C., Algebraic analysis of Many-valued logic, Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467-490.

[15] Grigolia R., Algebraic analysis of Lukasiewicz-Tarski's n-valued logical systems, Selected Papers on Lukasiewicz Sentential Calculi, Ossolineum 1977, 81-91.

[16] McNaughton R., A theorem about infinite-valued sentential logic, J.S.L., 16 (1951), 1-13.

Кафедра Философии
Тбилисского Государственного Университета

Rezo Grigolia

O FORMUŁACH M-ZMIENNYCH W RACHUNKACH ŁUKASIEWICZA

Tematyka pracy nawiązuje do niezmiernie ważnego nurtu badań logicznych - badań algebr wolnych w klasie algebraicznych (matrycowych) modeli danego rachunku logicznego i uzyskiwanie charakteryzacji tzw. algebr Lindenbauma.

Rozważania prowadzone są w dwóch przypadkach: nieskończonej logiki Łukasiewicza i skończenie wartościowych logik Łukasiewicza. W przypadku pierwszym algebraicznymi modelami są tzw. MV-algebry Changa, a w drugim zdefiniowane przez autora MV_n-algebry. Głównymi wynikami są: twierdzenie 4 podające kształt wolnej m-generowanej MN_m-algebry oraz twierdzenie 5, uogólniające ten rezultat na klasę algebr Changa.