A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA PHILOSOPHICA 7, 1990

Patrice Bailhache

PERSPECTIVES ONTIQUES ET TEMPORELLES POUR LA LOGIQUE DÉONTIQUE (AXIOMATIQUE, SÉMANTIQUE ET COMPLETUDE)

Introduction

Pour contourner les nombreux paradoxes qui lui sont propres, la logique des normes a besoin de prendre en compte non seulement la dimension déontique, bien sûr, mais aussi des dimensions comme celle des modalités ordinaires (ontiques ou aléthiques), celle du temps, celle de l'action, celle du savoir, etc. On étudie ici, très sommairement, au simple niveau du calcul des propositions, la combinaison des trois dimensions ontique, déontique et temporelle. L'analyse sémantique permet d'"expliquer" avec un bon degré de vraisemblance les divers axiomes qu'il convient de poser. On donne pour finir la structure générale des preuves de complétude qui doivent être mises en oeuvre. Ces preuves sont essentielles, car ce sont elles, bien souvent, qui permettent de trouver les éléments axiomatiques et sémantiques propres aux systèmes; et, du fait du mélange des trois dimensions, elles sont d'une difficulté assez grande, qui mérite explication.

Notre but est ici de donner un nombre minimum d'indications sur un système o n t i q u e, d é o n t i q u e et t e m p o r e l que nous appellerons RS5-DS5, et qui, dans son genre du moins, formalise les intuitions les plus fondamentales en matière d'être, de devoir-être et de temporalité. Afin de remplir ce but, nous prendrons comme modèles de départ les systèmes ontiques T, S4, S5, bien connus, que nous considérerons du double point de vue axiomatique et sémantique. Nous varierons et enrichirons progressivement ces systèmes, pour parvenir finalement au système tridimensionnel désiré.

1. Description sommaire des systèmes

Systèmes purement ontiques T, S4, S5

Axiomatique. Comme les axiomatiques de tous les systèmes dont il va être question ici, celle de T contient un ensemble d'axiomes propres au pur calcul propositionnel non modal. Elle y ajoute les éléments suivants, dont nous noterons l'ensemble AxT:

Déf.$\blacksquare$ $\blacksquare p$ = il est nécessaire que p,

A$\blacksquare$1 $\blacksquare(p \supset q) \supset (\blacksquare p \supset \blacksquare q)$,

A$\blacksquare$2 $\blacksquare p \supset p$,

R$\blacksquare$ $\vdash f \longrightarrow \vdash \blacksquare f$.

Pour S4 et S5, s'ajoute respectivement l'un des deux axiomes (d'où les ensembles axiomatiques AxS4 et AxS5):

A$\blacksquare$S4 $\blacksquare p \supset \blacksquare\blacksquare p$,

A$\blacksquare$S5 $-\blacksquare p \supset \blacksquare - \blacksquare p$.

Sémantique. Nous considérerons les sémantiques "à la manière de Kripke", plus précisément sous la forme que leur ont donnée Hughes et Cresswell. "An Introduction to Modal Logic", 1968. Passant sur le détail des mécanismes d'évaluation des formules, nous ne conserverons que l'essentiel, à savoir les deux règles modales, qui sont à la base de la construction des diagrammes sémantiques:

M. Si dans un monde w_i figure und formule $\blacksquare f$ de valeur 0, alors il doit y avoir au moins un monde w_j tel que Rw_iw_j dans lequel figure f avec la valeur 0.

N. Si dans un monde w_i figure une formule $\blacksquare f$ de valeur 1, alors en tout monde w_j tel que Rw_iw_j doit figurer f avec la valeur 1.

La règle M (comme "möglich" = possible) exprime qu'une formule est possible dans un monde, si elle est vraie dans au moins un monde accessible au monde considéré. La relation Rw_iw_j exprime l'accessibilité du monde w_j pour le monde w_i.

Cette relation possède au moins la propriété de la *réflexivité*, ce qui est la traduction sémantique de l'axiome A■2 (le nécessaire implique le vrai). Elle est en outre *transitive* pour S4, et *transitive et symétrique* (donc une relation d'*équivalence*) pour S5. La règle **N** (comme "nécessaire"), semblablement, exprime qu'une formule est nécessaire dans un monde, si elle est vraie en tout monde accessible au monde considéré. Nous noterons les ensembles sémantiques correspondants **SmT**, **SmS4**, **SmS5**.

Systèmes purement déontiques D, DT, DS4, DS5

Axiomatique. Elle est très voisine de l'axiomatique des systèmes ontiques; pour D (ensemble AxD):

Déf.O	Op = il est obligatoire que p,
AO1	$O(p \supset q) \supset (Op \supset Oq)$
AO2	$Op \supset -O-p$,
RO	$\vdash f \longrightarrow \vdash Of$.

On remarque que l'axiome AO2 n'a pas la structure $Op \supset p$, celle qui correspondrait exactement à l'axiome ontique A■2, car un état de choses obligatoire n'est pas, par là-même, vrai. En revanche, puisque $-O-p$ veut dire qu'il est permis que p, AO2 exprime ce truisme normatif, que l'obligation implique logiquement la permission.

La règle RO peut choquer notre intuition. Elle n'en est pas moins admissible, après une réforme du concept d'*obligation*, réforme qui s'impose ici pour simplifier au maximum l'édification des systèmes logiques. On comprendra bien le sens de cette réforme, lorsque nous aurons présenté les modalités déontiques, liées aux modalités ontiques dans un même système sémantique.

Ajoutant des axiomes du genre $O(Op \supset p)$, $Op \supset O\,Op$, $-Op \supset O-Op$, on peut encore définir des systèmes DT, DS4, DS5, sur lesquels nous n'insisterons pas pour le moment.

Sémantique. Les deux règles **M** et **N** que nous avons vues ci-dessus à propos des systèmes ontiques doivent être remplacées par les suivantes:

B. Si dans un monde w_i figure une formule $O\,f$ de valeur 0, alors il doit y avoir au moins un monde w_j tel que $Sw_i w_j$ dans lequel figure f avec la valeur 0.

A. Si dans un monde w_i figure une formule $O\,f$ de valeur 1, alors en tout monde w_j tel que $Sw_i w_j$ doit figurer f avec la valeur 1.

Elles ont apparement tout à fait la même structure que les règles M et N, mais maintenant, outre qu'il est question de l'évaluation de l' obligatoire, la relation considérée n'est plus l'accessibilité $Rw_i w_j$, mais ce que nous appellerons la permissibilité, notée $Sw_i w_j$. Pour l'instant, sans autre précision, nous dirons que le monde w_j est permissible pour le monde w_i, si toutes les obligations du second sont réalisées dans le premier. Contrairement au cas de R, la relation S n'a aucune raison d'être réflexive. Toutefois, la validation de l'axiome AO2 $Op \supset -O-p$ exige une nouvelle propriété de la relation S:

$$\begin{array}{l} Op \supset -O-p \\ 1 \quad 0\ 01 \end{array}$$

Pour valider l'axiome, nous procédons par l'absurde en le supposant initialement faux (valeur 0). Ceci conduit à attribuer la valeur vrai (1) à chaque obligation Op et O-p. On voit alors, que les règles A et B ci-dessus ne suffiraient pas, à elles seules, à parachever la démonstration. Mais si l'on suppose en outre, que pour tout monde il existe au moins un monde permissible, alors la preuve sémantique de la validité de AO2 s'achève comme suit:

$$\begin{array}{lll} w_i & Op \supset -O-p, & \\ & 1 \quad 0\ 01 & \\ w_j & p & -p. \\ & 1 & 1\underline{0} \end{array}$$

Le monde w_j, dans lequel la proposition p devrait être à la fois vraie et fausse, est explicitement inconsistant et la fausseté de l'axiome est impossible. Ainsi aux deux règles A et B doit-on en ajouter une troisième, qui s'exprime par:

C. Pour tout monde w_i il doit y avoir au moins un monde w_j tel que $Sw_i w_j$.

C'est la s é r i a l i t é de la relation S. Les systèmes DT, DS4, DS5 ajoutent à cette propriété, de manière cumulative, et respectivement, les propriétés de p o s t - r é f l e x i v i t é (un monde est en relation avec lui-même, si du moins il est déjà permissible pour un autre), de t r a n s i t i v i t é et de p o s t - s y m é t r i e (définition semblable). Les ensembles sémantiques qui en résultent seront notés **SmD**, **SmDT**, **SmDS4**, **SmDS5**.

<u>Système purement temporel R</u>

Il y a principalement trois manières d'exprimer le temps en logique des propositions: en employant soit des temps verbaux (présent, passé, futur), soit des "laps de temps orientés" (aujourd'hui, hier, demain...), soit enfin des d a t e s. Cette dernière manière est évidemment la plus riche de possibilités d'expression, particulièrement lorsqu'on a aussi affaire à des modalités ontiques et déontiques. L'<u>axiomatique</u> est la suivante (ensemble **AxR**):

Déf.R	Rtp = il est réalisé à la date t que p,
At1	$Rt(p \supset q) \supset (Rtp \supset Rtq)$,
At2	$Rtp \equiv -Rt -p$,
At3	$Rt'Rtp \equiv Rtp$,
Rt1	$\vdash f \longrightarrow \; \vdash Rtf$,
Rt2	$\vdash Rtf \longrightarrow \; \vdash f$ (t non libre dans f).

La <u>sémantique</u>, quant à elle, met en oeuvre un ensemble de mondes liés entre eux par une relation d'accessibilité temporelle (w_j est postérieur à w_i), dont, pour des raisons de brièveté, nous préférons ne pas parler. Nous allons voir, en revanche, comment cette sémantique s'articule avec celle des modalités ontiques et déontiques.

<u>Systèmes ontiques et temporels RT, RS4, RS5</u>

Du point de vue <u>axiomatique</u>, ces systèmes sont définis par la réunion des ensembles AxT, AxS4, AxS5 et de l'ensemble AxR, ci-dessus, à q u o i l'o n d o i t a j o u t e r d e s a x i o m e s p r o p r e s à l a c o m b i n a i s o n d e s d i m e n s i o n s o n t i q u e e t t e m p o r e l l e, le tout formant l'ensemble axiomatique AxRT, AxRS4 ou AxRS5. Ces axiomes sont les suivants:

A■t1 Rt■p ≡ Rt■Rtp,

A■t2 t' ⩽ t ⟶ Rt'■Rtp ⊃ Rt■Rtp.

Mais c'est ici que le double traitement axiomatique et sémantique s'avère indispensable et fructueux. Car, sans l'analyse sémantique, on percevrait mal la signification de ces nouveaux axiomes. Or la sémantique, loin de compliquer les choses, les éclaire très simplement.

Sémantique. Pour exprimer sémantiquement la temporalisation des modalités ontiques, il suffit de reprendre la sémantique des systèmes ontiques, et d'y remplacer les m o n d e s par des r o u t e s. Les routes sont des ensembles de mondes ordonnés chronologiquement. Assurément, ceci paraît tout simple; en fait, toute la question est de définir correctement la structure de l'ensemble des routes. Cette structure est alors définie de la manière suivante.

On a des regles M et N analogues à celles des systèmes purement ontiques:

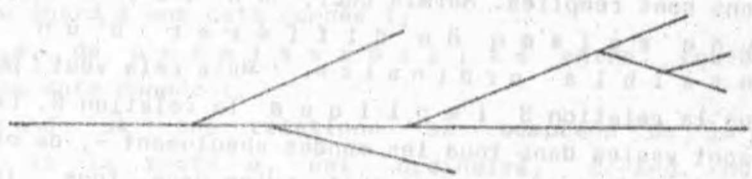
M. Si sur une route σ_i figure à la date t une formule ■f de valeur 0, alors i l d o i t y a v o i r a u m o i n s u n e route σ_j telle que $Rt\sigma_i\sigma_j$, sur laquelle f figure à la date t avec la valeur 0.

N. Si sur une route σ_i figure à la date t une formule ■f de valeur 1, alors s u r t o u t e route σ_j telle que $Rt\sigma_i\sigma_j$ doit figurer f à la date t avec la valeur 1.

La modification essentielle est qu'il faut considérer maintenant une relation ternaire $Rt\sigma_i\sigma_j$, exprimant que la route σ_j est accessible pour la route σ_i à la date t. Considérant tout de suite RS5, le système phénoménologiquement le plus complet, les propriétés de la relation s'expriment comme suit (pour tout instant t et toutes routes σ_i, σ_j et σ_k):

- réflexivité (par rapport aux routes) $\longrightarrow Rt\sigma_i\sigma_i$,
- symétrie $Rt\sigma_i\sigma_j \longrightarrow Rt\sigma_j\sigma_i$
- transitivité $(Rt\sigma_i\sigma_j$ et $Rt\sigma_j\sigma_k) \longrightarrow Rt\sigma_i\sigma_k$,
- ramification $(t' \leqslant t$ et $Rt\sigma_i\sigma_j) \longrightarrow Rt'\sigma_i\sigma_j$.

A première vue, ces propriétés peuvent paraître compliquées; en réalité, elles formalisent des intuitions extrêmement simples. Car en identifiant la relation $Rt\sigma_i\sigma_j$ avec le fait que les deux routes σ_i, σ_j ont tous leurs états du monde en commun au moins dans tout le passé et le présent de la date t, ces propriétés correspondent tout simplement à la structure ramifiée vers l'avenir, illustrée par le schéma suivant et parfaitement conforme à nos intuitions les plus ordinaires en matière de temporalité (le futur est vers la droite).



Une proposition future, nécessaire à un instant donné, est une proposition vraie sur toutes les routes qui divergent à cet instant. Bien entendu, dans ces conditions, une proposition passée est par là-même nécessaire; même une proposition strictement présente l'est aussi, ce qui n'a rien de paradoxal.

L'axiome ci-dessus A$\blacksquare$t2 traduit, on le devine (et cela se démontre assez facilement), précisément la propriété sémantique de la *ramification*.

Systèmes ontiques et déontiques T-DT, S4-DS4, S5-DS5

Pour simplifier, ne raisonnons que sur le premier de ces systèmes.

Du point de vue axiomatique, comme tout à l'heure, on doit combiner des éléments issus de deux dimensions différentes. On réunit donc les ensembles **AxT** et **AxDT**, et la question est de savoir ce que l'on doit ajouter comme axiome propre au rapprochement des deux ordres ontique et déontique. Or ici encore, la considération de la sémantique nous permet de clarifier nos intuitions. L'axiome qui convient s'écrit:

A$\blacksquare$O $\blacksquare p \supset Op$

c.-à-d. que le *nécessaire* implique l'*obligatoire*. Il y a évidemment une parenté de signification entre cet axiome et la règle purement ontique RO, qui pose que pour toute thèse sa nécessité est également thèse. L'analyse sémantique explique cette parenté et le caractère assez étrange de ces formules.

Sémantique. Les structures SmT et SmDT sont reprises. La seule question délicate est de déterminer les rapports entre les relations R et S, respectivement d'accessibilité et de permissibilité entre les mondes. Or nous avons vu qu'un monde permissible est un monde dans lequel toutes les obligations sont remplies. Hormis ceci, un tel monde n'a aucune raison de différer d'un monde accessible ordinaire. Mais cela veut précisément dire que la relation S implique la relation R. Les thèses - qui sont vraies dans tous les mondes absolument -, de même que les propositions nécessaires - qui sont vraies dans tous les mondes accessibles au monde donné -, sont donc également vraies dans tous les mondes permissibles. C'est donc qu'elles sont obligatoires, ce qu'expriment axiomatiquement la règle RO et l'axiome A$\blacksquare$O.

Systèmes ontiques, déontiques et temporels RT-DT, RS4-DS4, RS5-DS5

Nous pouvons finalement effectuer la fusion des trois ordres de dimensions. Commençant par RT-DT, nous constaterons que, axiomatiquement, cette fusion se traduit par la réunion des précédents ensembles **AxT**, **AxDT** et **AxR**, à quoi on ajoutera les axiomes propres aux fusions partielles rencontrées ci-dessus, A$\blacksquare$O, A$\blacksquare$t1, A$\blacksquare$t2, plus deux axiomes propres à la fusion des modalités déontiques et temporelles, qui sont analogues à A$\blacksquare$t1 et A$\blacksquare$t2:

AOt1 $\quad RtOp \equiv RtORtp$,

AOt2 $\quad t' < t \longrightarrow Rt'O(Rt'ORtp \supset RtORtp)$

(remarquer la structure légèrement différente de AOt2 par rapport à celle de A$\blacksquare$t2).

Mais il faut encore ajouter un axiome propre à la fusion simultanée des modalités ontiques, déontiques et temporelles. Il s'écrit:

A$\blacksquare$Ot $\quad t' < t \longrightarrow Rt'ORt(Op \supset \blacksquare p)$

et son interprétation, à nouveau, exige l'analyse sémantique. A ceci, le système RS5-DS5 - pour ne parler que de lui - ajoute l'axiome propre de S5, plus:

A■OS4 Op ⊃ ■Op.

<u>Sémantique</u>. Celle de RT-DT combine les sémantiques des systèmes RT et DT. Plus précisément, elle comporte deux relations:

- $Rt\sigma_i\sigma_j$ d' a c c e s s i b i l i t é s i m p l e entre routes, eu égard à une date donnée t;

- $St\sigma_i\sigma_j$ de p e r m i s s i b i l i t é entre routes, eu égard à une date donnée t.

La seconde de ces relations se comprend de la manière suivante. Si la route σ_i est ordinaire, c.-à-d. non permissible pour une autre, la route σ_j lui est confondue jusqu'à la date t. Ensuite, la seconde route diverge de la première, en devenant "bonne" à partir de cette date. Ainsi, toute route permissible est partagée en deux branches, l'une ordinaire, l'autre "bonne", à une date que nous appellerons d a t e c a r a c t é r i s t i q u e (le terme de "bon" doit bien sûr être pris en un sens très général, au même titre que celui d' "obligatoire"). Si la route σ_i est déjà permissible et si la date t est postérieure à sa date caractéristique, les routes σ_i et σ_j peuvent être confondues au delà de t dans l'avenir, la partie bonne de σ_i étant permissible pour elle-même à partir de sa date caractéristique.

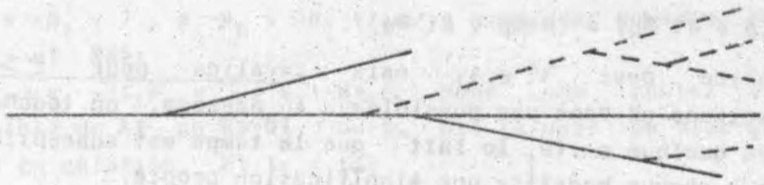
Les règles d'évaluations des opérateurs ■ et O étant les mêmes que ci-dessus (règles M, N et A, B), on retrouve les propriétés de la relation R propre au système RT (réflexivité et ramification), et l'on doit ajouter les suivantes:

- sérialité de S $(\forall t)(\forall\sigma_i)(\exists\sigma_j)\ St\sigma_i\sigma_j$,
- post-réflexivité de S $St\sigma_i\sigma_j \longrightarrow St\sigma_j\sigma_j$,
- post-ramification de S $(t' < t \text{ et } St'\sigma_i\sigma_j \text{ et } St\sigma_j\sigma_k) \longrightarrow St'\sigma_j\sigma_k$,
- inclusion R-S $St\sigma_i\sigma_j \longrightarrow Rt\sigma_i\sigma_j$,
- post-inclusion S-R $(t' < t \text{ et } St'\sigma_i\sigma_j \text{ et } Rt\sigma_j\sigma_k) \longrightarrow St\sigma_j\sigma_k$.

Les deux premières propriétés ne présentent aucune difficulté. La troisième est une p o s t - r a m i f i c a t i o n, et non pas une simple ramification, car la date caractéristique à laquelle une route permissible devient bonne joue un rôle essentiel. Pour reculer dans le passé la date de permissibilité d'une route par rapport à une autre, il faut que la première soit bien déjà permissible à la date antérieure à laquelle on veut se référer. Sinon, elle n'aurait, pour le voisinage d'une telle date, qu'un carectère simplement ontique, et rien ne permettrait d'inférer la vérité de la relation de permissibilité. On retrouve, ici temporalisée, une situation analogue à celle que décrit la propriété de post-réflexivité.

Il convient d'autre part de ne pas confondre l'inclusion R-S avec la post-inclusion S-R. La première de ces deux relations est tout à fait semblable à celle qui a été mentionnée pour les systèmes mélangeant les modalités ontiques et déontiques, à ceci près que le temps est maintenant pris en compte. Elle correspond à l'axiome A■O. La seconde, en revanche, est de nouveau une propriété du type "post-", c.-à-d. qu'elle exprime une condition qui n'a lieu que lorsque l'entrée dans les mondes permissibles est déjà faite (dans l'énoncé de la propriété, cette entrée se fait à la date t', et la condition d'inclusion S-R est réalisée à la date strictement postérieure, t). L'axiome correspondant est A■Ot. La sémantique permet maintenant d'en comprendre le sens. Toutes les routes accessibles ou permissibles pour une route elle-même déjà permissible, et à une date où cette route est bonne, toutes ces routes ne peuvent être que bonnes, car la sémantique suppose que les variations possibles du bon ne peuvent que rester bonnes. Si ce n'était pas le cas, les états déclarés antérieurement bons auraient conduit à des états "mauvais" et n'auraient donc pas été réelement parfaits. Il faut bien comprendre que ceci n'implique aucun déterminisme normatif, car l'interprétation de la sémantique sous-entend que le monde réel n'est jamais bon. Les états permissibles ne jouent qu'un rôle de parangon, de modèle à suivre dans l'action, qu'il serait tout à fait illusoire d'imaginer avoir atteint un jour...

Quant on ajoute aux propriétés mentionnées, celles qui conviennent pour décrire le système **RS5-DS5** (la transitivité de R, la symétrie de R et ce qu'on peut appeler la transitivité R-S, exprimée par $(Rt\sigma_i\sigma_j$ et $St\sigma_j\sigma_k) \longrightarrow St\sigma_i\sigma_k)$, la sémantique s'illustre très simplement par des schémas du genre suivant:



Les parties pointillées représentent les branches bonnes des routes. Conformément à ce qui a été expliqué, dès qu'une route devient bonne, elle le reste et elle ne se ramifie, au delà de sa date caractéristique, qu'en routes dont les branches du futur sont également bonnes. On voit que la simplicité du schéma ontico--déontico-temporel se traduit par des éléments sémantiques relativement complexes, et par des éléments axiomatiques aussi complexes et moins intuitifs. Le rapprochement de ces deux types d'éléments permet de renforcer la compréhension que nous en avons. Or ce rapprochement est mis en oeuvre par deux groupes de métathéorèmes: d'une part ceux de la solidité (anglais "soundness") des systèmes, d'autre part ceux de leur complétude. Dans le premier groupe on établit que toute thèse est valide, dans le second c'est l'inverse qui est prouvé, c.-à-d. que toute expression valide est thèse. Les démonstrations du premier groupe ne sont pas très difficiles. Il suffit de montrer, pour chaque système, que les propriétés sémantiques valident bien les axiomes et conservent les règles d'inférence. Les preuves du second groupe, au contraire, sont autrement épineuses. Nous voudrions en dire quelques mots ici.

2. Structure générale des preuves de complétude

Puisque le système que nous considérons comme le meilleur (du moins dans le cadre de cette étude) s'apparente à S5, on pourrait espérer que la preuve de complétude par forme normale conjonctive modale, qui consiste à réduire au premier degré modal n'importe quelle expression, puisse s'étendre au présent cas. Malheureusement, on se rend facilement compte qu'il n'en est rien. Car ce genre de preuve repose sur des théorèmes de réduction, comme $\blacksquare(p \vee \blacksquare q) \equiv (\blacksquare p \vee \blacksquare q)$, qui, déjà dans un système simplement ontique et temporel, ne se laissent pas généraliser. Ainsi, p. ex.,

$$Rt\blacksquare(p \vee Rt'\blacksquare q) \equiv (Rt\blacksquare p \vee Rt'\blacksquare q)$$

est valide pour $t' \leqslant t$, mais invalide pour $t' > t$, et les réductions ne sont pas possibles. Au passage, on touche là du doigt, en quelque sorte, le fait que le temps est susceptible de conférer à chaque modalité une signification propre.

Il faut donc employer un autre type de démonstration de complétude. Le plus direct est peut-être celui qui consiste à bâtir la preuve d'une formule valide d'après la structure même de son diagramme de validation. C'est ce que nous avons fait, en choisissant le style de Hughes et Cresswell 1968.

Pour prouver que:

$$\models f \longrightarrow \vdash f$$

on associe à chaque monde w_j (a chaque route σ_j, pour les systèmes temporalisés) du diagramme de validation de f une certaine formule w'_j (ou σ'_j), c a r a c t é r i s t i q u e des contenus vérifonctionnels de ce monde (ou de cette route). On choisit cette formule de telle sorte que les trois conditions suivantes se trouvent remplies:

C1. Si w_j (σ_j) est explicitement inconsistant, c.-à-d. s'il existe une partie bien formée (PBF) de w_j (σ_j) à laquelle les valeurs v r a i et f a u x ont été attribuées à la fois, alors $\vdash w'_j$ ($\vdash \sigma'_j$).

C2. Si Rw_iw_j (ou Sw_iw_j ou Rtw_iw_j ou Stw_iw_j), si $\vdash w'_j$ (ou $\vdash \sigma'_j$) alors $\vdash w'_i$ (ou $\vdash \sigma'_i$).

C3. Dans le cas du monde ou de la route initiale, w'_1 ou σ'_1 n'est autre que la formule f elle-même.

La condition C1 amorce la preuve, C2 la transmet de monde en monde (ou de route en route), et C3 l'achève. Ceci, toutefois, n'est que le schéma très général des démonstrations de complétude. En effet, la définition de la formule caractéristique doit être modifiée selon les mondes ou routes auxquels on a affaire. C'est p. ex.:

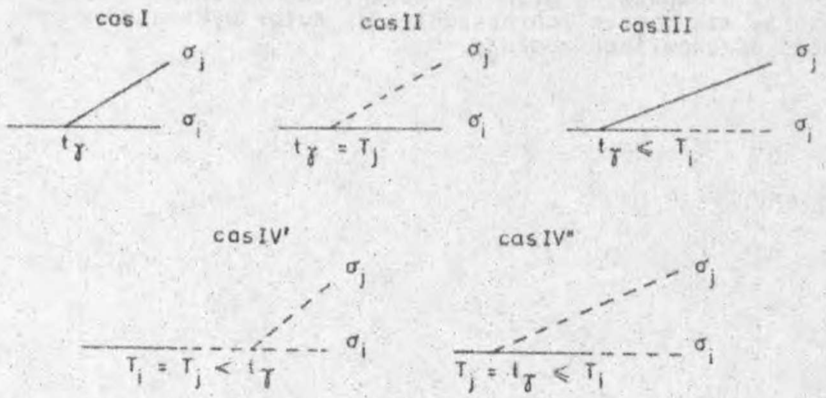
$\alpha \vee -\beta_1 \vee \ldots \vee -\beta_k$ pour un monde simplement accessible du système T ou permissible de D, dans lequel α est la formule issue de l'application de la règle **M** ou **B** qui a "créé" le monde, et dans lequel les β sont les formules issues de l'application de la règle **N** ou **A**;

$\alpha \vee -\beta_1 \vee \ldots \vee -\beta_k \vee O\beta_1 \vee \ldots \vee -O\beta_k$ pour un monde permissible de **DS4** et **DS5**;

$Rt_\infty \alpha \vee -Rt_1\beta_1 \vee \ldots \vee -Rt_k\beta_k$ pour une route simplement accessible de **RT** ou **RT-DT**, où t_∞ est la date de divergence des routes en relation, et $t_i < t_\infty$;

$RT_jO(Rt_\infty \alpha \vee -Rt_1\beta_1 \vee \ldots \vee -Rt_k\beta_k)$ pour une route permissible de **RT-DT**, où les t_i ont la même signification et où T_j est la date caractéristique de la route σ_j.

D'un système à l'autre, la réalisation de la condition C3 ne change guère; celle de C1 change assez peu; mais celle de C2 varie beaucoup et réclame de sérieux efforts. Cependant, ces efforts sont récompensés, car c'est la réalisation de C2 qui fait vraiment trouver et comprendre les structures axiomatiques et sémantiques convenables. Par ex., dans le cas de **RT-DT**, il y a cinq cas possibles de relation entre routes; les figures suivantes en donnent une illustration:



En outre, les systèmes de type S5 (DS5, RS5, RS5-DS5) exigent une démarche particulière pour la prise en compte des propriétés de symétrie ou de post-symétrie. On peut, comme nous l'avons montré (Bailhache, "Normes et modalités", 1983) considerer un diagramme d'un tel type comme un diagramme de type S4 enrichi progressivement par l'addition de la symétrie, et donc par celle des nouveaux mondes et des nouvelles formules qui en résultent. Le souci d'être bref nous empêche ici d'entrer dans plus de détails. De D à **RT-DT**, en passant par tous les systèmes intermédiaires, les démonstrations prennent plus de 80 pages. Pour plus d'informations, nous renvoyons à l'ouvrage que nous venons de mentionner.

Université de Nantes
France

Patrice Bailhache

AKSJOMATYKA A LOGIKA DEONTYCZNA

Zagadnienie aksjomatyki w logice deontycznej analizowane jest przez autora z dwu punktów widzenia. Pierwszy z nich jest bardziej filozoficzny. Bada się na jego gruncie zalety i wady aksjomatów czysto deontycznych. Analiza ta wskazuje na konieczność wprowadzenia do logiki deontycznej przestrzeni w stosunku do niej zewnętrznej, tj. przestrzeni modalności klasycznych. Drugi punkt widzenia jest natury bardziej technicznej. Chodzi w nim głównie o dowody zupełności wymagane na gruncie logiki deontycznej. Z racji trudności pomija się często ich prezentację. Autor wykazuje w pracy niezbędność dowodów tego rodzaju.