A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA PHILOSOPHICA 7, 1990

Philippe de Rouilhan

SUR LA FORMATION DE LA NOTION DE VALIDITÉ

§ 1. Le premier lieu de la logique

La seule difficulté de cet exposé tiendra sans doute à l'attitude inhabituelle dans laquelle il a été préparé et dans laquelle seule il peut être entendu: l'attitude caractéristique des pères fondateurs de la logique moderne, que, suivant Heijenoort[1], je caractériserai d'un mot: l' universalisme - à quoi j'opposerai, naturellement, le particularisme habituel des logiciens contemporains, en particulier en théorie des modèles.

Quelle est l'idée de la logique à l'époque classique de la logique moderne, à l'époque de Frege?

En premier lieu, l'idée est de dévoiler la structure logique profonde du langage, c.-à-d. la structure de la pensée qui y trouve expression, sous le voile de sa structure grammaticale superficielle. D'où, naturellement, l'idée d'associer à la tâche d'analyse logique de ce langage logiquement imparfait qu'est le langage ordinaire la tâche de synthèse, si je puis dire, d'un langage extra-ordinaire et logiquement parfait, dont la structure reflète fidèlement, au lieu de la masquer, la structure de la pensée, et dans lequel on puisse "paraphraser", comme on dit, les énoncés du langage ordinaire - je dirai: un "langage de paraphrase".

Le "langage ordinaire", c'est le langage lui-même, tout entier, que l'on parle, et de même le "monde" dont on parle. Au-delà, il n'y a rien, et c'est la seule chose qu'il m'importe de marquer en

[1] J. van Heijenoort, Logic as Calculus and Logic as Language, "Boston Studies in the Philosophy of Science" 1967, vol. 3, pp. 440-446.

ce premier lieu: qu'il n'y a pas de métalangage comme langage au-delà du langage (et cela vaut aussi bien pour le langage de paraphrase), pas de métalogique comme logique au-delà de la logique, pas d'engagement ontologique possible à l'égard d'un monde au-delà du monde; bref, que la logique est universelle. C'est ça, l'universalisme, son noyau rationnel.

§ 2. Le second lieu de la logique

En second lieu, l'idée est de déterminer les inférences (logiquement) valides, et c'est ce second lieu que je veux explorer. La question est de savoir si, de certaines prémisses en nombre fini, il est possible de tirer une certaine conclusion dont on soit assuré de la vérité pour peu que l'on ait reçu, pour une raison ou pour une autre, et à tort ou à raison, les prémisses elles-mêmes comme vraies.

Une telle entreprise est tributaire de la précédente, car la possibilité d'inférence en question tient, non au contenu, mais à la forme (ou structure) logique des prémisses et de la conclusion, cette forme ordinairement latente, devenue patente dans le langage de paraphrase. C'est de prémisses de telle et telle forme que la logique nous dira qu'il est possible de tirer une conclusion de telle autre forme. Comme il est facile de voir, la détermination des inférences valides revient à celle des énoncés vrais en vertu de leur seule forme logique, bref des énoncés logiquement vrais.

Il est temps de remarquer qu'en toute rigueur, on a non seulement besoin d'un langage de paraphrase, mais encore, dans ce langage, d'une distinction entre signes logiques et extralogiques. C'est seulement sur la base d'une telle distinction que la notion de forme logique d'un énoncé de ce langage devient claire: il suffit d'y remplacer les signes extra-logiques par des lettres schématiques (au sens de Quine) convenables (c.-à-d. retenant leurs catégories et leurs identités ou différences) pour obtenir un schéma, ou formule (constituée, donc, de signes logiques et de lettres schématiques), représentant aussi clairement que possible la forme logique de l'énoncé en question. Mais la distinction entre signes logiques et extra-logiques semble avoir quelque chose d'irréductiblement conventionnel, et sans doute convient-il de relativiser la notion de forme logique, et donc celle de vérité logique, à telle ou telle distinction convenue et reconnue comme telle.

La détermination des inférences valides revient, ai-je dit plus haut, à celle des énoncés logiquement vrais; elle revient aussi à celle des formules qui représentent des formes d'énoncés logiquement vrais (du langage de paraphrase et, à travers lui, du langage ordinaire), autrement dit des formules valides.

§ 3. La validité syntaxique et la complétude expérimentale

Les formules étant supposées données, la question est de savoir lesquelles sont valides. La réponse classique (Frege, Russell) est que les formules valides sont les "théorèmes" correspondant à telle ou telle notion de "démonstration", c.-à-d. à la donnée de tels et tels "axiomes" et "règles d'inférence" (la réserve des guillemets s'impose pour un tel lexique à un tel niveau). Ces choses sont bien connues, et l'on sait que plusieurs notions de "démonstration" ont eu cours, historiquement, qui, toutes, revenaient pratiquement au même.

L'une de ces notions étant choisie, on définit donc:

(Df1) $\mathrm{val}(\underline{x})$ ssi $\vdash \underline{x}$,

en supposant évidemment, conformément à l'attitude universaliste, que soient disponibles, dans le cadre de la logique elle-même, c.-à-d. dans le langage de paraphrase, les moyens d'expression de cette définition, et, dans le monde, les entités correspondantes (entre autres, les formules elles-mêmes - disons: des ensembles héréditairement finis). Une supposition analogue accompagnera toute définition envisagée au cours de cet exposé. Sur ce point, pour cette définition, avec la logique de Frege ou celle de Russell, p. ex., pas de problème.

Reste, dans cette optique, une dernière question: celle de la complétude: les formules atteintes de cette façon sont-elles toutes les formules valides; c.-à-d. toutes celles qui représentent des formes d'énoncés logiquement vrais du langage de paraphrase et, à travers lui, du langage ordinaire (on ne remet pas en cause l'opération de paraphrase)?

Redoutable question, à laquelle les classiques, pour des raisons de principe que je dirai (§ 11), ne donneront jamais de réponse _théorique_, _a priori_. Ils se contenteront de constater qu'on ne rencontre pas, d'expérience, de formule attendue comme valide qui ne soit déjà recensée comme telle: c'est la "complétude expérimentale", selon le mot de Herbrand, ou _a posteriori_.

§ 4. Transition: question d'interprétation

Le vrai problème, dans tout ça, c'est qu'on ne sait pas encore de quoi on parle exactement: que certaines formules soient reconnues comme valides est une chose, la question de savoir ce que l'on veut dire quand on dit que telle formule _particulière explicitement_ donnée est valide, _a fortiori_ la question de savoir ce que c'est que la validité d'une formule particulière non explicitement _donnée_ ou la validité d'une formule _en général_, en est une autre. Cette dernière question commande la possibilité d'une réponse théorique, _a priori_, à la question de la complétude.

(Df1) est plutôt un _critère_ qu'une _définition_; ou, pour le dire autrement: l'ainsi nommée définition est _extrinsèque_, quand il nous faudrait une définition _intrinsèque_. Celle à laquelle on pense immédiatement est la suivante: une formule valide est une formule vraie pour toutes les interprétations de ses lettres schématiques:

(Df2) val($\underline{x}$) ssi vr($\underline{x}$) pour toutes les interprétations des lettres schématiques.

Impossible d'en rester là, non seulement à cause du caractère déjà problématique d'une des notions qu'implique une telle définition, la notion de vérité; mais encore et surtout à cause de son imprécision: qu'est-ce que ça veut dire, précisément: "pour toutes les interprétations"? (l'alternative sera: "pour toutes les interprétations _dans notre monde_" ou "pour toutes les interprétations _dans tout monde possible_"?). Tout ça pour ne rien dire encore d'une autre objection que l'on a pu faire à la définition (Df2), fondée sur la considération des formules dépourvues de lettres schématiques, et dont je reporte la formulation (et la levée) à plus tard (§ 10).

§ 5. La validité sémantique: premier essai

Pour autant qu'elle implique la notion de vérité, celle de vérité logique ou de validité est au moins aussi problématique qu'elle. En fait, elle l'est bien davantage. La différence entre le problème de la vérité et celui de la vérité logique ou de la validité mérite d'être soulignée. La question de savoir ce que l'on veut dire quand on dit que tel énoncé particulier explicitement donné est vrai admet (sauf exceptions dues au paradoxe du Menteur et autres semblables) une réponse toute simple: on ne veut rien dire d'autre que ce que l'on dirait en énonçant cet énoncé lui-même. La seule question difficile est de savoir ce que c'est que la vérité d'un énoncé particulier non explicitement donné ou la vérité d'un énoncé en général[2]. Avec la question de la vérité logique d'un énoncé particulier explicitement donné ou de la validité de la formule qui en représente la forme logique, la difficulté surgit immédiatement, celle de savoir ce que veut dire: "pour toutes les interprétations". Inutile d'aller plus loin pour commencer à l'exposer.

Admettant que connecteurs, quantificateurs et variables du premier ordre sont des signes logiques, soit, p. ex., la formule:

(1) $(\exists \underline{x})\ \neg P\ (\underline{x})$.

et soit à dire ce que l'on voudrait dire si l'on disait que cette formule est vraie pour toutes les interprétations de "P" (en fait, on ne le dit pas, mais qu'importe). J'examinerai successivement plusieurs réponses auxquelles on pourrait songer.

La première réponse que j'envisagerai est que la quantification universelle en question serait à entendre comme n'importe quelle autre, donc - soit dit à l'adresse de qui aurait quelque idée de mondes possibles derrière la tête -, relativement à notre monde; on voudrait dire tout simplement que la formule en question est vraie pour toutes les interprétations de "P" dans notre monde. Plus précisément, et sans solliciter la notion de vérité:

(Df3) $\mathrm{val}((1))$ ssi $(\forall \underline{X})(\exists \underline{x})\neg \underline{X}(\underline{x})$.

---

[2] Cf. A. Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, Warszawa 1933; idem, Der Wahrheitsbegriff in den forma-

La première objection à faire à cette définition dépend du cadre logique choisi: elle est inexprimable, indicible - ou encore dénuée de sens - si c'est celui de la logique du premier ordre, qui exclut la quantification du second ordre "$(\forall \underline{X})$"; elle ne l'est pas si c'est celui d'une logique d'ordre supérieur, mais alors d'autres du même genre, relatives à d'autres formules, le sont à leur tour - à moins qu'il ne s'agisse d'une logique d'ordre infini. C'est dans ce dernier cas qu'il est le plus tentant de généraliser:

(Df4) $\quad val(\underline{x})$ ssi $vr(\underline{x}^*)$,

où $\underline{x}^*$ est à $\underline{x}$ ce que "$(\forall \underline{X})(\exists \underline{x})\neg \underline{X}(\underline{x})$" est à "$(\exists \underline{x})\neg P(\underline{x})$": la clôture universelle d'un certain énoncé ouvert canoniquement associé (ou cet énoncé même, s'il n'est pas ouvert). Mais cette définition, faute d'une théorie universaliste satisfaisante de la vérité[3], reste inutilisable.

L'idée de telles définitions remonte à Tarski[4] (qui échappe à l'objection d'indéfinissabilité de la vérité qu'il a lui-même démontrée[5], non par l'allègement des contraintes qui pesaient sur la définition "satisfaisante" comme telle de la vérité, mais par l'abandon, en fait et sans mot dire, des exigences universalistes), et, d'une certaine manière, à Bolzano (qui ignore ladite objection).

§ 6. La validité sémantique: deuxième essai

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cadre exemplaire de la logique du premier ordre, avec les signes logiques que j'ai dits. La seconde réponse que j'envisagerai à la question de savoir ce que l'on voudrait dire si l'on disait que la formule (1) est vraie pour toutes les interprétations de "P" consiste à donner une "ré-

---

lisierten Sprachen, "Studia Philosophica" 1936, t. 1, pp. 261-405 (Post-Scriptum).

[3] Malgré S. K r i p k e, Outline of a Theory of Truth, "The Journal of Philosophy" 1975, vol. 72, pp. 690-716.

[4] A. T a r s k i, Über den Begriff der logischen Folgerung, [dans:] Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris 1935, 1936.

[5] Dans: A. T a r s k i, Pojęcie prawdy...

plique" dans le dicible de la réponse indicible envisagée précédemment - et, si c'est possible, à généraliser. Il semble que cela puisse se faire de trois façons au moins.

1°) On pourrait penser à faire jouer le rôle de monde - ou univers - à une certain ensemble $\underline{b}$ convenablement choisi, et donc à réduire au premier ordre toutes les quantifications de (Df3), à relativiser les quantifications réduites aux échelons convenables de l'échelle d'ensembles de base $\underline{b}$, et à remplacer les subsomptions par des appartenances:

(Df5) $\mathrm{val}((1))$ ssi $\mathrm{val}_{\underline{b}}((1))$ ssi $(\forall \underline{y}\in\mathcal{P}(\underline{b})\underline{y})(\exists_{\underline{x}\in\underline{b}}\underline{x})(\underline{x}\notin\underline{y})$

2°) On pourrait penser à restreindre la quantification indicible de (Df3) aux valeurs de "$\underline{X}$" qui correspondent à des ensembles:

(Df6) $\mathrm{val}((1))$ ssi $(\forall_{\mathrm{ens}(\underline{y})}\underline{y})(\exists\underline{x})\underline{x}\notin\underline{y}$.

3°) On pourrait penser à restreindre la quantification indicible de (Df3) aux valeurs de "$\underline{X}$" définissables: à remplacer cette quantification référentielle par une quantification substitutionnelle (notations évidentes):

(Df7) $\mathrm{val}((1))$ ssi $(\forall_{\mathrm{préd}_1(\underline{y})}\underline{y})\ \mathrm{vr}\ (\ulcorner(\exists\underline{x})\neg\underline{y}(\underline{x})\urcorner)$.

La définition (Df7) ne va pas sans difficulté, à cause du prédicat de vérité qu'elle implique. Renonçons-y prudemment. Restent (Df5) et (Df6): elles ne sont pas équivalentes: (Df5) rend (1) non valide, alors que (Df6) la rend valide - ce qui condamne (Df6). Reste (Df5), qui est généralisable sans difficulté de principe:

(Df8) $\mathrm{val}(\underline{x})$ ssi $\mathrm{val}_{\underline{b}}(\underline{x})$ ssi...,

définition qui donne dans tous les cas le résultat attendu, pourvu que $\underline{b}$ soit infini (constat "expérimental"). Si $\underline{b}$ n'a qu'un élément, (Df5) rend la formule:

(2) $(\exists\underline{x})P(\underline{x}) \longrightarrow (\forall\underline{x})P(\underline{x})$

valide de façon inattendue. De façon générale, si $\underline{b}$ est fini, on considèrera la formule (de Löwenheim):

(3) $\{(\forall\underline{xyz})[(\underline{R}(\underline{x},\underline{y}) \wedge \underline{R}(\underline{x},\underline{z})) \longrightarrow \underline{y}=\underline{z}] \wedge (\forall\underline{y})(\exists\underline{x})\underline{R}(\underline{x},\underline{y})\} \longrightarrow$
$\longrightarrow (\forall\underline{x})(\exists\underline{y})\underline{R}(\underline{x},\underline{y})$

Evidemment, on aimerait comparer la définition (Df8) à celle, (Df4), dont elle est la réplique, mais, en toute rigueur, c'est impossible - ce serait insensé. Et, de toute façon, dans le meilleur des cas, où b est infini, (Df8) n'est pas plus intrinsèque, finalement, que l'extrinsèque (Df1).

J'ai fait remonter à Tarski l'idée des définitions originales (Df3, Df4), je pourrais aussi bien le faire de leurs répliques (Df5, Df8); ou, mieux, des unes et des autres confondues dans l'abandon, dont j'ai fait état, des exigences universalistes.

§ 7. Transition: variables et mondes possibles

Indépendamment du caractère exprimable ou non des définitions originales, indépendammant du cadre logique choisi, n'aurait-il pas fallu, de toute façon, dénoncer en elles, déjà, le caractère extrinsèque que j'ai dénoncé, à l'instant, en leurs répliques? Cette seconde objection pourrait prendre la forme suivante (je dirai par après ce qu'il faut en penser).

Ces définitions originales font dépendre intensionnellement, sinon extensionnellement, la validité de notre monde au lieu de l'en libérer comme elles le devraient. Lorsque Tarski[6] demande si les énoncés analytiques en son sens, c.-à-d. les énoncés logiquement vrais au sens ici envisagé, sont bien ceux qui "ne disent rien sur le monde", la réponse à lui faire est que, de toute façon, la définition qu'il en donne, pour la raison que nous venons de dire, ne saurait nous satisfaire. Ces définitions originales reviennent à interpréter "pour toutes les interprétations" comme: "pour toutes les interprétations dans notre monde", alors qu'il faudrait l'interpréter comme: "pour toutes les interprétations dans tout monde possible".

Peut-être, mais alors il faut être cohérent. Car il y a un certain geste, passé inaperçu tant il semblait aller de soi, et qui pourtant commandait la première interprétation, et ce geste, c'est l'assignation des variables comme signes logiques. En toute rigueur, elle impliquait l'assignation du réel comme épuisant à lui tout seul tout le champ du possible; si elle est maintenue,

[6] A. Tarski, Über den Begriff...

l'objection ne tient pas. La considération des formules dépourvues de lettres schématiques le confirmera. Pour pouvoir faire droit à la seconde interprétation, celle en termes de mondes possibles, il faut, en toute rigueur, assigner dès l'origine, les variables comme signes extra-logiques, et introduire corrélativement (ce que personne ne se soucie jamais de faire expressément) des <u>lettres schématiques de variables</u>.

<u>§ 8. La validité sémantique: troisième essai</u>

Admettons donc que connecteurs et quantificateurs du premier ordre sont des signes logiques, mais que les variables du premier ordre sont des signes extra-logiques. Une conséquence immédiate est que la formule (1) n'en est plus une, et que les énoncés auxquels elle correspondait ont changé de forme logique: celle-ci est maintenant représentée par la formule:

(2) $(\exists v)\neg P(v)$,

où "v" est une lettre schématique de variable du premier ordre.

La vérité logique des énoncés en question ne revient plus à la validité de (1), mais à celle de (2). La question est alors de savoir ce que l'on voudrait dire si l'on disait que la formule (2) est vraie pour toutes les interprétations de ses lettres schématiques, c.-à-d. de "P", mais aussi de "v". Et il serait pratiquement absurde, en effet, dans ces conditions et jusqu'à plus ample informé, de répondre dans la ligne de (Df3), même en tenant compte, de quelque façon, de la nouvelle lettre schématique "v". La première réponse qui s'impose est bien celle en termes de mondes possibles: que la formule (2) est vraie pour toutes les interprétations de "P" et de "v" dans tout monde possible:

(Df9) val((2)) ssi pour tout monde possible $\underline{W}$, $\mathrm{val}_{\underline{W}}((2))$,
avec: $\mathrm{val}_{\underline{W}}((2))$ ssi $(\forall_{\underline{W}}\underline{X})(\exists_{\underline{W}}\underline{x})\neg\underline{X}(\underline{x})$,

les relativisations à $\underline{W}$, et d'abord la notion même de monde possible, demandant à être précisées.

Inutile de dire que (Df9) est encore plus inexprimable que ne l'était, éventuellement, (Df3): l'idée classique de monde possible, pour imprécise qu'elle demeure, rend précisément cette définition inexprimable quel que soit le cadre logique choisi (fût-il d'ordre infini); de même, <u>a fortiori</u>, sa généralisation:

(Df10) $\quad \mathrm{val}(\underline{x})$ ssi pour tout monde possible $\underline{W}$, $\mathrm{val}_{\underline{W}}(\underline{x})$,
avec: $\mathrm{val}_{\underline{W}}(\underline{x})$ ssi $\mathrm{vr}_{\underline{W}}(\underline{x}^*)$,

où $\underline{x}^*$ est, comme pour (Df4), la clôture universelle d'un certain énoncé ouvert canoniquement associé (ou cet énoncé même, s'il n'est pas ouvert). Ces définitions donnent à la validité son sens attendu (classiquement), mais ce sens est un non-sens.

L'idée de telles définitions remonte, de quelque façon, au premier Wittgenstein, à Rossell[7] et jusqu'à Leibniz.

§ 9. La validité sémantique: quatrième et dernier essai

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cadre exemplaire de la logique du premier ordre, comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 7, sauf qu'ici, rappelons-le, les variables sont des signes non plus logiques, mais extra-logiques, et que ce n'est donc plus de la formule (1) qu'il s'agit, mais de la formule (2). La seconde réponse que j'envisagerai à la question de savoir ce que l'on voudrait dire si l'on disait que la formule (2) est vraie pour toutes les interprétations de "P" et de "v" consiste à <u>donner une "réplique" dans le dicible de la réponse indicible envisagée précédemment</u> - et, si c'est possible, à généraliser. L'idée est de faire jouer le rôle de mondes possibles aux ensembles non vides (cette condition de non-vacuité n'étant d'ailleurs pas essentielle) de notre monde, et donc à réduire toutes les quantifications de (Df9) au premier ordre, puis à relativiser la première à la classe des ensembles $\underline{y}$ non vides et les suivantes aux échelons convenables de l'échelle d'ensembles de base $\underline{y}$, et à remplacer les subsomptions par des appartenances:

(Df11) $\quad \mathrm{val}((2))$ ssi $(\forall_{\mathrm{ens}(\underline{y})\wedge \underline{y}\neq\emptyset}\underline{y})\mathrm{val}_{\underline{y}}((2))$,
avec: $\mathrm{val}_{\underline{y}}((2))$ ssi $(\forall_{\underline{z}\in\mathcal{P}(\underline{y})}\underline{z})(\exists_{\underline{x}\in\underline{y}}\underline{x})\underline{x}\notin\underline{z}$.

Cette définition est généralisable sans difficulté de principe:

(Df12) $\quad \mathrm{val}(\underline{x})$ ssi $(\forall_{\mathrm{ens}(\underline{y})\wedge \underline{y}\neq\emptyset}\underline{y})\mathrm{val}_{\underline{y}}(\underline{x})$,
avec: $\mathrm{val}_{\underline{y}}(\underline{x})$ ssi...,

définition qui donne toujours le même résultat (attendu) que (Df8)

---

[7] B. Russell, Introduction fo Mathematical Philosophy, G. Allen and Unwin, London 1919.

(à la substitution près de lettres schématiques au variables dans les formules considérées) s'il existe des ensembles infinis, dont b. Evidemment, on aimerait comparer la définition (Df12) à celle, (Df10), dont elle est la réplique, mais, en toute rigueur, c'est impossible - ce serait insensé.

La réplique donne une idée de ce que voudrait dire l'originale si elle voulait dire quelque chose. Il faut dire que les deux ne sont pratiquement jamais distinguées, leur distinction n'ayant de sens que dans l'horizon universaliste classique, où peut se poser la question du dicible et de l'indicible, et qui n'est précisément pas celui de la contemporaine théorie des modèles. C'est dans la confusion des deux (et l'obscurité quant au caractère logique ou non des variables) que se constitue la réponse contemporaine habituelle à la question de la définition de la validité. Cette réponse remonte, en-deça de Tarski, à Hilbert et Ackermann[8]. Mais pour nous qui les distinguons, (Df12) donne bien un sens à la validité de (2), p. ex., ce que (Df10) ne faisait pas, mais tombe malheureusement sous le coup de la même critique que (Df8).

Le point n'est pas, faut-il le préciser, que (Df12) suppose, comme déjà (Df1), une ontologie infinie d'ensembles héréditairement finis, ne serait-ce que pour pouvoir parler des formules: cette dépendance à l'égard de notre monde n'a rien, à mes yeux, de dirimant; ni seulement que, pour être extensionnellement attendue, elle suppose davantage, à savoir l'existence d'ensembles infinis; mais que, supposant tout cela, elle fait dépendre intensionnellement la validité de notre monde, elle n'est pas plus intrinsèque que l'extrinsèque (Df1).

D'où, en somme, si on en reste à (Df10) et (Df12), le dilemme: soit la validité a son sens attendu, mais ce sens est un non-sens; soit elle a un sens qui en est un, mais ce sens est inattendu.

§ 10. Contre-épreuve: résolution d'un paradoxe

J'ai évoqué plus haut (§ 4) une objection que l'on avait pu faire à la définition (Df2), fondée sur la considération des formules dépourvues de lettres schématiques. Ces formules sont des énon-

---

[8] D. Hilbert, W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, Berlin 1928.

cés constitués à partir des seuls signes logiques et qui représentent leur propre forme logique - je les appellerai énoncés logiques; pour elles, pour eux, la validité coïncide avec la verité logique. Exemple d'un tel énoncé, formulé dans le cadre de la logique du premier ordre avec identité dont tous les signes, y compris celui d'identité, soient réputés logiques:

(3) $(\exists x)(\exists y)x \neq y.$

Si l'on s'en tenait rigoureusement à la définition (Df2) (pour imprécise qu'elle demeure) - telle est l'objection en question -, il faudrait dire que, puisque la formule est sans lettre schématique et que l'énoncé est vrai tout court, la formule-énoncé (3) est, de façon inattendue, valide-logiquement vraie. Que tout énoncé logique vrai soit logiquement vrai, c'est ce qu'un Russell pouvait croire à l'époque des Principles, mais qu'il dénonca plus tard comme une erreur au vu, précisément, de contre-exemples du même genre[9]. A quelques exceptions près[10], les classiques pensent comme ce dernier: un énoncé tel que (3) est bien vrai dans notre monde, mais n'en est pas logiquement vrai pour autant: tous les énoncés logiques vrais ne sont pas logiquement vrais, et la définition (Df2) (quelque précision qu'on y apporte) est inacceptable[11].

Il faut choisir: ou bien renoncer à la définition (Df2) pour sauver le statut de vérité extra-logique de l'énoncé (3), ou bien renoncer à ce statut pour sauver cette définition. Et là où quasiment tous les classiques choisissent la première école, je propose de choisir la seconde. Mis à part la nécessité de préciser de façon satisfaisante le sens de l'expression: "pour toutes les interprétations", la définition (Df2) me paraît inattaquable. Ce n'est pas en tout cas le petit paradoxe des énoncés logiques qui me fera changer d'avis. Je tiens au contraire que les énoncés lo-

---

[9] B. Russell, The Principles of Mathematics, 2 ed., G. Allen and Unwin, London 1937, Introduction, pp. vii-viii.

[10] L. Wittgenstein, Logisch-philosophische Abhandlung (Tractatus logico-philosophicus), "Annalen der Naturphilosophie" 1921 (Leipzig):, P. Ramsey, The Foundations of Mathematics, "Proceedings of the London Mathematical Society" 1926, ser. 2, pp. 338-384 (papier lu devant la L.M.S. en 1925).

[11] Cf. p. ex. H. Wang, Logical Truth, [dans:] From Mathematics to Philosophy, Routledge and Kegan Paul, London 1974, pp. 122-123.

giques vrais sont <u>bien</u> des énoncés logiquement vrais, par exemple l'énoncé (3).

L'énonce (3) est logiquement vrai; ou plutôt, car c'est le moment d'être précis: il l'est <u>s'il est bien un énoncé logique, c.-à-d. si ses signes sont bien logiques, en particulier les variables.</u> C'est le point: la décision de tenir les variables pour des signes logiques semble aller de soi, nous voyons ce qu'elle signifie, ce qu'il en coûte. Si l'on ne peut supporter la vérité logique de l'énoncé (3), ce n'est pas la définition (Df2) qu'il faut remettre en cause, mais la logicité des variables. Il faut savoir ce que l'on veut: ou bien que les variables soient logiques, ou bien que la vérité de l'énoncé (3) soit extra-logique.

De toute façon, que les variables soient logiques ou non, cela ne change rien à ceci que les énoncés logiques vrais sont bien des énoncés logiquement vrais. Dans le premier cas, la thèse est paradoxale, mais je viens de m'en expliquer; dans le second, elle est triviale, car il <u>n</u>'y a <u>plus</u> d'énoncé logique (vrai ou non). Dans ce cas, l'énoncé (3), p. ex., n'est plus logique; sa forme logique <u>n</u>'est <u>plus</u> représentée par lui-même, mais par la formule:

(4) $$(\exists v)(\exists v')v \neq v',$$

où "v" et "v'" sont des lettres schématiques de variables du premier ordre; et il est encore vrai, bien sûr, mais il n'est plus logiquement vrai: il ne le serait que si la formule (4) était valide, c.-à-d., suivant la définition (Df12), si l'on avait:

(5) $$(\forall_{ens(\underline{y})\wedge\underline{y}\neq\emptyset}\underline{y})(\exists_{\underline{x}\in\underline{y}}\underline{x})(\exists_{\underline{x}'\in\underline{y}}\underline{x}')\underline{x} \neq \underline{x}',$$

ce qui n'est évidemment pas le cas.

§ 11. La complétude théorique

L'idée classique de validité est celle qui suppose obscurément que les variables sont <u>extra</u>-logiques (à preuve la position classique sur des énoncés tels que (3), et la thèse corrélative absurde qu'il y a des énoncés logiques vrais qui ne sont pas logiquement vrais). Dans ce paragraphe, je le supposerai clairement et me placerai dans le cadre de la logique du premier ordre.

La comparaison fondamentale est celle qui rapporte la définition syntaxique de la validité (Df1) à sa définition sémantique en termes de modèles (Df10) - (Df12). L'équivalence extensionnelle des deux fut conjecturée par Hilbert et Ackermann en 1928[12], prouvée par Gödel en 1929[13] et publiée en 1930[14].

C'est ainsi qu'on raconte l'histoire, qui serait donc finie depuis longtemps. On ne s'en étonnera pas, je n'en crois rien. Toute ma mise en scène était destinée à faire apparaître le théorème de complétude dans sa duplicité cachée, à justifier ainsi l'une des dernières questions de Heijenoort: "que démontre la démonstration du théorème de complétude?", et à lui donner une réponse aussi peu tautologique que possible.

Pour moi, de deux choses l'une: ou bien ce théorème a son sens (classiquement) attendu (équivalence de (Df1) et de (Df10)), mais ce "sens" est un non-sens, et sa "démonstration" ne démontre rien du tout; ou bien ce théorème est bien doué de sens, mais ce sens n'est pas le sens attendu, mais seulement sa "réplique" (équivalence de (Df1) et de (Df12)) - ce qui n'est pas rien, est même admirable, mais n'est pas ce qu'on attendait.

On comprend, maintenant, pourquoi les pères fondateurs ne pouvaient répondre à la question de la complétude théorique: parce qu'en toute rigueur, ils ne pouvaient même pas la poser. Et l'on ne peut plus s'étonner que, dans les années 20, un Herbrand ou un Skolem aient pu, pour raisons "philosophiques", passer à côté d'un théorème "techniquement" à leur portée.

Par la suite, donc, (Df10) et (Df12) furent confondues, la définition équivoque de la validité sémantique et le théorème de complétude qui va avec purent paraître à la fois sensés et attendus, et la théorie des modèles prendre la place que l'on sait dans une "logique" devenue indiscernable de son double.

---

[12] D. Hilbert, W. Ackermann, op. cit.

[13] K. Gödel, Ueber die Vollständigkeit des Logikkalküls, Thèse, Université de Vienne, 1929.

[14] Idem, Die Volstandigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, "Monatshefte für Mathematik und Physik" 1930, nr. 37, pp. 349-360.

§ 12. Conclusion: la vérité logique, problème ouvert

Que conclure de tout ça? Reprise dans l'horizon universaliste, la définition de la vérité logique en termes de modèles apparaît dans sa duplicité, et avec elle la théorie des modèles elle-même et la logique moderne-contemporaine, qui lui accorde la place que l'on sait.

Que faire? Renoncer, ici comme ailleurs, à penser l'impensable, ne plus rêver, trouver autre chose. Ma conclusion n'est pas que l'idée de vérité logique est en elle-même indéfendable, mais que sa définition sémantique ordinaire, elle, l'est, pas moins, en tout cas, que sa définition syntaxique. A ce point, "vérité logique" est le titre d'un problème ouvert.

Peut-être une bonne définition en est-elle possible. Après tout, depuis quelque temps, la théorie de la vérité a pris un nouveau départ[15], pourquoi pas, maintenant, la théorie de la vérité logique?

Centre National
de la Recherche Scientifique
Paris, France

Philippe de Rouilhan

O TWORZENIU POJĘCIA "TAUTOLOGICZNOŚCI"

Na gruncie myśli współczesnej próbowano określić pojęcie wynikania logicznie poprawnego. Odsyła to do pojęcia form (logicznych) wypowiedzi logicznie prawdziwych, a więc do formuł tautologicznych. W dyskusji na ten temat jedno ze stanowisk ma charakter syntaktyczny i zewnętrzny (Frege, Russell), inna ma charakter semantyczny i wewnętrzny. Formuła tautologiczna to z definicji formuła prawdziwa dla wszystkich interpretacji liter schematycznych.

Jak rozumieć pojęcie "wszystkie interpretacje"? Istnieje w tym względzie kilka propozycji; jedna z nich pochodzi od Tarskiego, inna od Hilberta i Ackermanna. Pokazując, dlaczego te definicje są niewystarczające, autor traktuje problem jako otwarty.

---

15 Avec S. Kripke, op. cit.