Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 29: 2020, Nr 4 (116), ISSN 1230–1493
DOI: 10.24425/pfns.2020.135072

Bartłomiej Skowron,
Krzysztof Wójtowicz

Realizm w filozofii matematyki: Gödel i Ingarden

Słowa kluczowe: *K. Gödel, idee, R. Ingarden, intuicja ejdetyczna, intuicja matematyczna, jakości idealne*

W kwestii istnienia przedmiotów matematycznych (jak liczby, funkcje, permutacje, grupy, przestrzenie liniowe etc.) można zająć dwa zasadniczo różne stanowiska. Badacz o nastawieniu realistycznym uzna, że istnieją one w taki lub inny sposób poza umysłami matematyków, iż są samodzielne i niezależne od poznających je podmiotów. Zainteresowany podmiot może co najwyżej się im przyglądać i badać ich własności oraz zachodzące pomiędzy nimi stosunki – nie może zaś nic w nich zmieniać oraz nie ma wpływu na ich istnienie. Drugi pogląd – w szerokim sensie antyrealistyczny – ma zupełnie inny charakter: zgodnie z nim, przedmioty matematyczne są pochodną ludzkiego poznania bądź stanowią użyteczne konwencje – ewentualnie są one przydatnymi fikcjami. Sprawny matematyk w tym ujęciu jest wyćwiczonym mistrzem „gry w konwencje" do tego stopnia, że wyniki jego pracy sprawdzają się w innych naukach, a w szczególności w fizyce.

Realizm matematyczny jest roboczym stanowiskiem filozoficznym bardzo wielu matematyków. Często słyszy się żartobliwe stwierdzenia, że matematyk jest od poniedziałku do piątku realistą, w weekendy zaś dopiero staje się antyrealistą, np. formalistą. Źródłem realizmu jest doświadczenie obcowania z pewną rzeczywistą sferą, którą trzeba poznać – i nie jest to oczywiście łatwe. Matema-

Bartłomiej Skowron, Politechnika Warszawska, Wydział Administracji i Nauk Społecznych, Pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa; e-mail: bartlomiej.skowron@pw.edu.pl, ORCID: 0000-0002-6544-7706.
Krzysztof Wójtowicz, Uniwersytet Warszawski, Wydział Filozofii, ul. Krakowskie Przedmieście 3, 00-927 Warszawa; e-mail: wojtow@uw.edu.pl, ORCID: 0000-0002-1187-8762.

tyk ma doświadczenie swoistego „oporu materii”. W metaforycznej formie pisze o tym G.H. Hardy:

> [Z]awsze uważałem matematyka w pierwszym rzędzie za obserwatora, człowieka, który obserwuje odległe pasmo górskie i odnotowuje swoje obserwacje. Jego zadaniem jest jasne wyodrębnienie i opisanie innym tak wielu szczytów, jak tylko jest to możliwe (Hardy 1929, s. 18).

Przytoczmy jeszcze jedną z wielu wypowiedzi zawodowych matematyków potwierdzających to doświadczenie:

> Gdy jednak uprawiam matematykę, mam subiektywne odczucie, że istnieje realny świat, który należy odkryć: świat matematyki. Ten świat jest dla mnie znacznie bardziej nieprzemijający, niezmienny i rzeczywisty niż fakty rzeczywistości fizycznej (wypowiedź Lipmana Bersa, specjalisty w dziedzinie równań różniczkowych; Hammond 1983, s. 31).

Georg Cantor miał o sobie powiedzieć, iż jest jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem w stosunku do treści swoich prac (pisał o tym w jednym z listów do M.G. Mittag-Lefflera; por. Murawski 1984, s. 77), zaś w swej rozprawie habilitacyjnej zawarł uwagę, iż „liczby całkowite, podobnie jak i ciała niebieskie, tworzą za pomocą praw i relacji pewien stały porządek” (cyt. za: Murawski 1984, s. 77).

Samo psychologiczne doświadczenie matematyków obcowania z czymś realnym nie stanowi jednak argumentu rozstrzygającego. Zresztą nie wszyscy matematycy mają takie doświadczenia. Pojawia się więc naturalne pytanie dotyczące możliwości uzasadnienia stanowiska realizmu matematycznego. We współczesnych dyskusjach można wskazać dwie podstawowe strategie argumentacyjne. Pierwsza z nich to – mówiąc ogólnie – strategia pochodząca od W.V. Quine’a. Druga to strategia Kurta Gödla. Różnią się one zasadniczo w wielu punktach. Skupimy się tutaj na strategii Gödla, którą następnie skomentujemy z perspektywy fenomenologii Romana Ingardena, traktując szkicową prezentację strategii Quine’owskiej tylko jako uzupełnienie naszych analiz.

Nie ulega wątpliwości, że Ingarden jest pierwszoplanową postacią filozofii polskiej XX wieku. Jego myśl jest kojarzona z filozofią człowieka, estetyką, teorią literatury oraz ontologią. Znacznie rzadziej spotyka się jednak odniesienia do Ingardena w dyskusjach dotyczących filozofii matematyki. Znajomość myśli Ingardena wśród filozofów matematyki jest bardzo słaba – z dużą stratą dla filozofii matematyki, ponieważ myśl ta dostarcza subtelnej siatki pojęciowej, która mogłaby zostać zastosowana do analiz sporu realizm-antyrealizm. W czołowym czasopiśmie z zakresu filozofii matematyki „Philosophia Mathematica” wyszukiwanie słów „Roman Ingarden” oraz „Ingarden” poprzez wyszukiwarkę dostępną na stronie internetowej czasopisma[1] nie daje żadnych istotnych wyników. Hasło „Husserl” daje natomiast 148 wyników (stan na 12 września

[1] https://academic.oup.com/philmat [12.09.2020].

2020 r.). Wyniki te interpretujemy w następujący sposób: myśl Ingardena nie jest widoczna w głównym nurcie badań z zakresu filozofii matematyki na świecie, choć myśl fenomenologiczna jest tam obecna, tzn. jest przestrzeń na to, aby analizy Ingardenowskie znalazły zasłużone i właściwe miejsce.

Artykuł rozpoczynamy od przedstawienia najważniejszych aspektów realistycznego stanowiska Gödla, wskazując między innymi na doniosłą rolę, jaką przypisywał Gödel intuicji w poznaniu matematycznym. Wskazujemy w tej części, że tłem myśli filozoficznej Gödla była fenomenologia Edmunda Husserla. Gödel bowiem, jak podaje Gian-Carlo Rota (1992, s. 175), uważał Husserla za największego filozofa od czasów Leibniza. W drugim rozdziale przedstawiamy wybrane aspekty myśli Ingardena, nawiązując tutaj do stanowiska Gödla. W szczególności analizujemy pojęcie intuicji, o której pisał Gödel, w świetle Ingardenowskich analiz aktów ideacji czystych jakości idealnych, procesu uzmienniania jakości oraz oglądów ejdetycznych. Wskazujemy na rolę idei w poznaniu matematycznym, a także interpretujemy w duchu Ingardenowskim pewne podobieństwa pomiędzy percepcją a oglądem matematycznym – podobieństwa, na które wskazywał Gödel. Opieramy się tu głównie na analizach Ingardena zamieszczonych w jego pracy *U podstaw teorii poznania*. Całość kończymy krótkim podsumowaniem.

Celem artykułu nie jest prezentacja fenomenologicznych wątków w filozofii matematyki w całej ogólności – skupiamy się przede wszystkim na spuściźnie Ingardena. Mamy nadzieję, że niniejszy artykuł będzie zachętą dla filozofów matematyki do głębszego studiowania myśli Ingardena – zaś dla fenomenologów i ingardenistów okazją do pochylenia się nad współczesnymi zagadnieniami dotyczącymi filozofii matematyki[2].

1. Stanowisko filozoficzne Gödla

Kurt Gödel[3] znany jest chyba wszystkim filozofom pracującym w tradycji analitycznej jako autor ważnych twierdzeń metalogicznych i nowych metod formalnych, które odegrały ogromną rolę w dyskusjach filozoficznych dotyczących

[2] Oczywiście istnieją prace, które łączą w sobie zarówno rozważania z zakresu filozofii matematyki, jak i wątki Ingardenowskie. Wśród polskich autorów należy wspomnieć oryginalne prace Piotra Błaszczyka (2005, 2009, 2010), nowatorskie ujęcie hermeneutyczne Zbigniewa Króla (2006), prace Bartłomieja Skowrona (2014, 2015), Jana Woleńskiego (1980), jak i innych autorów. Niemniej są to raczej potwierdzające regułę wyjątki.

[3] Nie jest tu możliwa szczegółowa prezentacja myśli Gödla: taką Czytelnik znajdzie w innym miejscu (Wójtowicz 2002; a w wersji skróconej – Wójtowicz 2018). Istnieje monograficzne ujęcie problematyki związanej z twierdzeniami Gödla i ich filozoficzną interpretacją (Krajewski 2003).

m.in. filozofii umysłu, języka, logiki, matematyki, szeroko rozumianej epistemologii etc. Najbardziej znane wyniki techniczne to tzw. pierwsze i drugie twierdzenie Gödla (mówiąc hasłowo: twierdzenie o niezupełności arytmetyki i twierdzenie o niedowodliwości niesprzeczności systemu formalnego wewnątrz owego systemu)[4]. Bardzo ważny dla rozwoju logiki i podstaw matematyki (a także filozofii) okazał się też wynik Gödla dowodzący niesprzeczności pewnika wyboru i hipotezy kontinuum z aksjomatami ZF (Zermela-Fraenkla)[5].

Mniej znany jest fakt, iż Gödel żywo interesował się filozofią – zwłaszcza filozofią matematyki. Co więcej, to właśnie filozofia stała się głównym przedmiotem jego zainteresowań od pewnego momentu jego życia. Jednak przez długi czas jego prace filozoficzne nie były szerzej znane. Za życia Gödla została opublikowana stosunkowo niewielka liczba jego prac – pozostały one w formie rękopisów. Recepcję dzieła Gödla dodatkowo utrudniał fakt, że Gödel posługiwał się notacją stenograficzną Gabelsbergera. Jednak obecnie badacze mają do dyspozycji ogromny materiał badawczy w postaci *Collected Works* (Gödel 1986, 1990, 1995), które zawierają niepublikowane wcześniej prace Gödla, wraz z często wnikliwymi komentarzami specjalistów.

Należy podkreślić, że poglądy Gödla dotyczące natury matematyki w naturalny sposób łączą się z poglądami dotyczącymi roli i natury filozofii. W szczególności warto zwrócić uwagę na bardzo wyraźną niechęć Gödla wobec stanowiska logicznego pozytywizmu i prezentowanej tam wizji matematyki i filozofii. Gödel wyraźnie podkreślał znaczenie analiz metafizycznych, a za zadanie filozofii i jej fundament uważał głęboką analizę pojęciową, a nie jedynie interpretowanie wyników nauk szczegółowych. Mówiąc o analizie pojęć, nie należy myśleć o definicyjnej redukcji czy analizie konwencji językowych – to bowiem prowadziłoby ostatecznie do nieskończonego regresu (lub też do pojęć nieredukowalnych). Ma ona więc mieć zupełnie inny charakter niż eksplikacja pojęć naukowych znana z nauk ścisłych – i ma polegać na wyjaśnianiu ich sensu (*Sinnklärung*) (Gödel 1961, s. 382). Gödel żywił nadzieję, że dyskusja filozoficzna uzyska z biegiem czasu poziom ścisłości charakterystyczny dla matematyki (Gödel 1951, s. 322). Hao Wang przytacza następującą opinię Gödla:

> Filozofia jako nauka ścisła powinna przyczynić się do rozwoju fizyki w takim stopniu, jak dzieło Newtona. Sądzę, że jest możliwe, iż taka teoria filozoficzna zostanie stworzona w ciągu najbliższych 100 lat, lub wcześniej (Wang 1996, s. 233).

---

[4] Rezygnujemy tutaj z prezentacji szczegółów technicznych; oczywiście twierdzenia te opierają się na określonych technicznych założeniach i mają ograniczony zakres stosowalności (o czym niekiedy zapominają interpretatorzy, co prowadzi do nieporozumień i nadużyć; por. np. Krajewski 2003; Wójtowicz 1996).

[5] Dopełnieniem wyniku Gödla jest wynik Paula Cohena, który udowodnił w 1963 roku niesprzeczność negacji hipotezy kontinuum z aksjomatami ZFC (Zermela-Fraenkla z pewnikiem wyboru). Okazało się więc, że hipoteza kontinuum jest od ZFC niezależna.

Gödel miał świadomość, że filozofia obecnie jest w stanie swoistego „niedorozwinięcia" (Gödel 1951, s. 311), zdawał też sobie sprawę z tego, że również jego własne rozważania nie osiągnęły wystarczającego poziomu jasności. Nie miał tu oczywiście na myśli tego, że wszelkie rozważania filozoficzne będzie można sformalizować i rozwiązywać zagadnienia filozoficzne niejako za pomocą metod czysto technicznych. Ścisłość analizy nie oznacza jej formalizacji.

Sądzimy, że takie stanowisko może być atrakcyjne z punktu widzenia zarówno filozofii analitycznej (dla której postulat klarowności jest fundamentalny – co często znajduje implementację w postaci formalizacji dyskursu), jak i dla innych nurtów filozoficznych. W szczególności uważamy, że na badania Ingardena można patrzeć jak na krok w kierunku realizacji postulatu „ścisłości nieformalnej"[6].

Zdaniem Gödla we współczesnej nauce i filozofii brak jest postępu w prawdziwym rozumieniu: rezygnujemy z próby poznania natury rzeczywistości, ograniczając się do zbierania informacji (Gödel 1961, s. 377). Jednak owemu przyrostowi posiadanych przez nas informacji nie towarzyszy bynajmniej przyrost rozumienia. Widoczne jest to, zdaniem Gödla, w nauce i filozofii nowożytnej i stanowi początek końca nauki teoretycznej. Ową kondycję filozofii po części tłumaczył faktem, że w filozofii dominują przesądy scjentystyczne. Ciekawa jest podana przez Gödla klasyfikacja stanowisk filozoficznych w zależności od – hasłowo mówiąc – głębi analiz:

> Chciałbym spróbować opisać – w filozoficznych terminach – rozwój podstaw matematyki od początku wieku i wpasować ten opis w ogólny schemat możliwych światopoglądów filozoficznych. [...] Sądzę, że najbardziej owocnym schematem klasyfikacji stanowisk światopoglądowych jest ich podział ze względu na stopień podobieństwa lub odwrócenia się od metafizyki (lub religii). W ten sposób natychmiast otrzymujemy podział na dwie grupy: po jednej stronie materializm, sceptycyzm, pozytywizm, po drugiej spirytualizm, idealizm i teologia. Od razu widoczne są również różnice stopnia w tym ciągu, mianowicie sceptycyzm jest oddalony od teologii jeszcze bardziej niż materializm, podczas gdy z drugiej strony idealizm, np. w swej panteistycznej postaci, jest osłabieniem teologii we właściwym rozumieniu tego słowa (Gödel 1961, s. 374).

Rozwój filozofii nowożytnej przebiega – zdaniem Gödla – „od prawa na lewo": następuje oddalanie się filozofii od zagadnień metafizycznych i teologicznych. Filozofia matematyki zaś należy – niejako z racji swej natury i przedmiotu badań – raczej do „strony prawej" (bardziej spekulatywnej

[6] Dowody Gödla na istnienie Boga można uznać za próbę tego typu precyzacji. Wang wspomina też o rozmowie Gödla z Carnapem (13.09.1940), której przedmiotem była metafizyka, w szczególności utworzenie spójnej doktryny metafizycznej, opartej na pojęciach Boga i duszy jako pierwotnych. Jak można się domyśleć, zdaniem Carnapa teoria taka miałaby charakter mitologiczny. Jednak Gödel sądził, że mogłaby być nie mniej sensowna niż fizyka teoretyczna, której także nie da się wyrazić w terminach czysto obserwacyjnych (Wang 1987, s. 217).

i dotyczącej pojęć abstrakcyjnych). Odmówienie matematyce posiadania obiektywnej treści wiąże się więc z pewnymi szerszymi tendencjami w filozofii, co zresztą podkreślał też Ingarden. Sam Gödel był sympatykiem „strony prawej", miał jednak świadomość tego, że jego poglądy nie przystają do „ducha czasów". Badacze myśli Ingardena z pewnością znajdą w Gödlu bratnią duszę. Ingarden bowiem był bardzo krytyczny w stosunku do empirystycznych, konwencjonalistycznych, jak i formalistycznych prądów w filozofii matematyki. Następujący cytat (jest to przypis do krótkiego i krytycznego omówienia formalizmu w filozofii matematyki) jasno pokazuje nastawienie Ingardena do tego typu prądów:

> Wszystko to rozwijało się z wielką dynamiką po pierwszej wojnie światowej, głównie w Warszawie, a szło w parze z nigdy niespisaną, sceptyczną, a zarazem wybitnie empirystyczną teorią poznania, połączoną z radykalnym konwencjonalizmem. Nie miejsce to, by wchodzić w szczegóły. Byłoby jednak interesujące odkryć kulisy tego całego prądu umysłowego w Polsce i w szerokim świecie, tkwiące właśnie w empirystycznych tendencjach prymitywnej w gruncie rzeczy psychofizjologicznej teorii poznania. Nieznajomość istotnych rysów poznawania spostrzeżeniowego przy równoczesnej nieumiejętności wyanalizowania podstawowych struktur przeżyć świadomych i ich poznawczych funkcji szła tu w parze z rzadko spotykaną bufonadą rzekomej wielkiej „ścisłości" i naukowości. To samo powtórzyło się z wyjątkowym podobieństwem wśród tzw. „wiedeńczyków", a potem po 1934 r., gdy główni neopozytywiści przenieśli się do USA, w krajach anglosaskich (Ingarden 1971, s. 174–175).

Ingarden doszukiwał się przyczyn tego stanu rzeczy między innymi w tym, że filozofią matematyki zajęli się mistrzowie dedukcji, którzy jednak byli pozbawieni „wprawy w poszukiwaniu intuicyjnych podstaw twierdzeń niewywiedliwych z innych twierdzeń" (Ingarden 1971, s. 175) oraz bez doświadczenia filozoficznego, a w szczególności bez rozeznania w epistemologii. Z drugiej zaś strony prądy te były – i tu widzimy wyraźne podobieństwo do opinii Gödla – konsekwencją fali sceptycyzmu filozoficznego, który przyszedł, zdaniem Ingardena, wraz z upadkiem idealizmu niemieckiego. Sceptycyzm doprowadził do empiryzmu, a on zaś do konwencjonalizmu. Matematyka przez pewien czas traktowana była jako swoista „zabawa ze znaczkami" – wyrafinowana, ale pozbawiona realnej treści. Należy dodać, że nurt formalistyczny był kiedyś stosunkowo silnie reprezentowany wśród matematyków i filozofów matematyki (por. znakomite studium historyczne: Detlefsen 2005), obecnie jednak formalizm w radykalnej postaci jest stanowiskiem rzadko spotykanym, a stanowiska antyrealistyczne przyjmują inne formy.

Gödel był zdeklarowanym reprezentantem realizmu matematycznego i jasno twierdził, iż matematyka ma charakter obiektywny i nie jest bynajmniej grą konwencji. Ilustracją opozycji Gödla wobec stanowiska logicznego pozytywizmu jest jego polemika z konwencjonalistyczną koncepcją matematyki. Matematyka nie jest składnią języka nauki, jak chcieliby logiczni empiryści, ale opisem obiektywnie istniejącego matematycznego uniwersum (choć opis ten jest niedoskonały i niepełny). Jak pisze Gödel:

> [N]iezależnie od tego, jak będą formułowane reguły syntaktyczne, moc i użyteczność powstającej w ten sposób matematyki jest proporcjonalna do mocy intuicji matematycznej koniecznej do udowodnienia dopuszczalności tych systemów. [...] jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną (Gödel 1953/1959, s. 358).

Tym, co umożliwia nam opisywanie niezależnej od nas rzeczywistości matematycznej, jest intuicja matematyczna, czyli swoista zdolność naszego umysłu do ujmowania prawd matematycznych (czyli – metaforycznie mówiąc – do „zobaczenia" ich prawdziwości):

> Niezależnie jednak od tego, że obiekty teorii mnogości są tak odległe od doświadczenia zmysłowego, w jakiś sposób je postrzegamy, o czym świadczy fakt, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę żadnych racji, dla których mielibyśmy mieć mniejsze zaufanie do tego rodzaju percepcji, to znaczy do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która skłania nas do budowania teorii fizycznych i do oczekiwania, że przyszłe dane zmysłowe będą z nimi zgodne, oraz do wiary w to, że pytania, które są teraz nierozstrzygalne, zostaną być może rozstrzygnięte w przyszłości (Gödel 1947/1964, s. 120–121).

Konwencje są więc w matematyce obecne, ale ich źródłem nie jest arbitralna decyzja: swobodnie mówiąc, oddają one istotę pojęć i wyrażają obiektywne prawdy. Podobne intuicje miał Ingarden, gdy krytykując konwencjonalistyczne nurty w filozofii matematyki pisał: „[...] żadne fakty nie słuchają, że tak się wyrażę, dowolnych umów" (Ingarden 1971, s. 176).

Koncepcja filozoficzna Gödla pozostaje w ścisłym związku z jego badaniami technicznymi; często do swoich wyników wyraźnie się odwoływał. Z drugiego twierdzenia Gödla wynika, że niesprzeczność danego systemu formalnego T nie jest formalnie dowodliwa w owym systemie (pomijamy subtelności techniczne), dotyczy to także niezależnego od owego systemu T tzw. zdania Gödla, które – swobodnie to ujmując – mówi o sobie „ja nie mam dowodu". Jednak jesteśmy w stanie dostrzec jego prawdziwość, co dla Gödla świadczy o tym, że potrafimy odwołać się do pozasystemowych prawd – i rozpoznać owe prawdy właśnie jako prawdy. To zaś możliwe jest jedynie dzięki temu, że posiadamy zdolność dokonania swoistego matematycznego wglądu (*mathematical insight*) (Gödel 1951, s. 309). Oczywiście nie chodzi o żaden „szósty zmysł", który pozwalałby na kontakt z „matematycznymi zaświatami". Richard Tieszen komentuje zarówno samą koncepcję Gödla, jak i utrzymane w tym pobłażliwym stylu odczytania owej koncepcji, twierdząc że nie stanowi ona „nierozsądnego, *quasi*-mistycznego przedsięwzięcia, jak starali się to przedstawić niektórzy komentatorzy" (Tieszen 2000, s. 237).

W jednym z artykułów Gödel (1961) wyraża nadzieję, że metodą, która umożliwi systematyczną analizę znaczenia pojęć matematycznych, będzie fenomenologia. Gödel zainteresował się filozofią Husserla około roku 1959. Wang pisze, że Gödel w czasie ich wspólnych rozmów zachęcał go do studiowania pism Husserla (Wang 1987, s. 120), zaś redukcję ejdetyczną uważał za metodę, która może pomóc w jaśniejszym postrzeganiu pojęć. Wang (1996, s. 256) przytacza też opinię Gödla, iż: „Fenomenologiczne badania natury obiektów matematycznych mają fundamentalne znaczenie dla podstaw matematyki”[7]. Gödel nie opracował jednak pełnej koncepcji epistemologicznej, ograniczając się do szeregu uwag, które nieraz nastręczają trudności interpretacyjne. Wydaje się, że systematyczny (nie historyczny) komentarz Ingardenowski do podanych wyżej twierdzeń Gödla o intuicji mógłby rzucić nowe światło na jego stanowisko. W dalszej części artykułu przedstawimy Ingardenowską, tzn. wychodzącą od aktu ideacji czystych jakości, interpretację wglądu matematycznego.

Realizm matematyczny w stylu Gödla jest zapewne bliższy doświadczeniu matematyków, należy jednak pamiętać o nurcie dominującym we współczesnych dyskusjach, który mieści się w tradycji analitycznej, a którego osią jest stanowisko filozoficzne Quine’a[8]. Quine wychodzi z pozycji naturalistycznych – w szerokim sensie tego słowa. Jest często określany także jako naturalista metafilozoficzny – odrzuca bowiem zdecydowanie postulat fundującego charakteru filozofii. Jego zdaniem, punktem wyjścia analiz filozoficznych winny być wyniki naukowe i analizy metanaukowe. Quine jest radykalnym empirystą, a za ostateczne kryterium ustaleń naukowych (ale też filozoficznych) uważa zgodność z danymi doświadczenia. Dotyczy to także zagadnień ontologicznych. W tym kontekście może nieco zaskakiwać fakt, iż Quine opowiadał się za stanowiskiem matematycznego realizmu. Jednak prowadzi do tego konsekwentne stosowanie tzw. kwantyfikatorowego kryterium istnienia. Mimo swoistego minimalizmu ontologicznego (i – jak pisze Quine – zamiłowania do „krajobrazów pustynnych”), Quine uznaje istnienie obiektów matematycznych – tych, które są niezbędne w matematycznym instrumentarium obecnym w nauce. Warto podkreślić, że analizy dotyczące statusu matematyki biorą swój początek w analizach dotyczących roli matematyki w nauce. Matematyka nie jest więc traktowana jako przedsięwzięcie intelektualne *per se*. Quine jasno stwierdza, że

[7] Nie należy jednak sądzić, że to studiowanie prac fenomenologicznych doprowadziło Gödla do realizmu matematycznego. Już wcześniej Gödel (1947/1964, 1951) uznawał stanowisko platonistyczne za najbardziej wiarygodne i długo przed 1959 rokiem prowadził rozważania dotyczące intuicji matematycznej. Jednak niezależnie od szczegółów biograficznych (których nie uważamy tutaj za kluczowe), nie ulega wątpliwości, że Gödel odkrył w pracach Husserla bliskie mu idee. O wątkach fenomenologicznych w myśli Gödla szczegółowo piszą Dagfinn Føllesdal (1995a, 1995b) i Richard Tieszen (1992, 1998).

[8] Szczegółowe omówienie Czytelnik znajdzie w innych pracach, np. Wójtowicz 2003, a w skrótowej formie: Wójtowicz 2004.

te fragmenty matematyki, które nie mają żadnych odniesień do nauk empirycznych (ma tu na myśli pewne fragmenty teorii mnogości, ale przykłady tego typu można wskazać także w innych gałęziach matematyki), mają status systemów pozbawionych interpretacji i stanowią jedynie pewnego rodzaju intelektualną igraszkę. Natomiast Gödel traktował matematykę jako samoistną formę działalności poznawczej, zaś kwestie zastosowań w naukach empirycznych uważał za pozbawione głębszego znaczenia dla analiz dotyczących istoty poznania matematycznego (i ontologii matematyki). Istotne też w koncepcji Quine'a jest to, że Quine uznaje tylko jeden sposób istnienia: obiekty mogą się oczywiście różnić własnościami, ale nie sposobami istnienia. Pod tym względem ujęcie Quine'a silnie kontrastuje z bogatą ontologią egzystencjalną Ingardena.

2. Poznanie matematyczne w ujęciu Ingardena

Mówiąc bardzo ogólnie, z punktu widzenia Ingardena poznanie matematyczne ma charakter realny, treściowy – a nie konwencjonalny czy formalny. Jest to bowiem poznanie pewnych jakości idealnych. Matematyk w ujęciu Ingardena stoi przed horyzontem możliwych kombinacji stałych i zmiennych w zawartościach idei matematycznych. Pierwotnymi aktami poznawczymi są akty ideacji, w których podmiot może uchwycić jakości idealne, a w aktach następczych – całe ich zespoły. Akty ideacji stawiają przed podmiotem czyste jakości idealne wprost i bez żadnych zapośredniczeń, dzięki temu, jeśli już dojdzie do aktu ideacji, to wynik poznawczy jest pewny, choć zawsze ograniczony do pewnego zespołu jakości. Jakości idealne konkretyzują się w zawartościach idei, tworząc złożone zestawy możliwych współwystępowań, które następnie są analizowane w twórczej i z istoty ejdetycznej pracy matematycznej. Oczywiście, matematyk nie ujrzy nigdy całości świata idei, niemniej jego poznanie może być trafne i prawomocne. W dalszej części opiszemy za Ingardenem proces poznania jakości idealnych, wskazując na pewne punkty wspólne w myśli Ingardena i Gödla.

2.1. Ideacja czystych jakości idealnych

Rozważmy w duchu Ingardena (1971, s. 286–322) akt spostrzegania żółtej metalowej sześciennej kostki wiszącej na suficie w pomieszczeniu oświetlonym światłem dziennym[9]. Przyglądając się tej kostce, widzimy kilka jakości, w tym

[9] Ingarden analizował postrzeganie zielonego liścia, a nie żółtej kostki – my potrzebowaliśmy co najmniej trójwymiarowego kształtu (przyczyny tego niedługo się wyjaśnią), dlatego używamy jako przykładu sześciennej kostki.

jej zabarwienie, tj. żółcień, następnie jej kształt, który jest zależny od pozycji, jaką względem kostki zajmujemy. W pewnym też sensie widzimy, a może raczej domniemujemy, że powierzchnia kostki jest szorstka lub gładka. We wtórnym nastawieniu możemy wyróżnić nasycenie, jasność oraz odcień żółcieni tej kostki. Wszystkie one stanowią z jednej strony jedność, przyglądamy się bowiem jednej kostce, w której są one jednostkowo skonkretyzowane, z drugiej zaś kierując odpowiednio naszą koncentrację, możemy odrywać kolejne jakości owego zabarwienia i badać je już dla nich samych. Zarówno kształt, jak i zabarwienie kostki przysługują tej oto kostce – jak mówi Ingarden (1971, s. 287): „stoją w formie przysługiwania", „określają" ją bądź „przypadają" jej. Owa forma przysługiwania jest nieusuwalna z aktu widzenia, ponieważ widzimy tę oto żółcień jako przysługującą właśnie tej oto żółtej kostce: nie ma możliwości oddzielenia tej formy od samej rzeczy. Ingarden zauważył jednak, że:

> [...] możemy nawet wyróżnianiem naszym tak pokierować, iż koncentrujemy się na samej „zieleni", jej jakości, jej nasyceniu i wreszcie na tym, jaka ona jest, nie potwierdzając niejako tego, że oto tu teraz występuje coś jednostkowego w naszym polu widzenia. Wówczas docieramy do „czystej" jakości, do czystej zieleni, a w szczególności do czystej „jakości" tej zieleni lub do jej czystego (w pewnym stopniu czy sposobie) nasycenia. Wtedy mamy naocznie to, co Husserl nazywał „czystą *species*", i spełniamy ten akt uchwytywania czy wyróżniania, który u Husserla w *Badaniach logicznych* nazywał się „ideacją" (Ingarden 1971, s. 287).

Następnie Ingarden zwraca uwagę na dwa rysy aktu ideacji. Po pierwsze, akt ten jest naocznym obcowaniem z czystą *species*, po drugie jest on spełniany przy równoczesnym spełnianiu aktu widzenia wzrokowego: obcujemy z idealną żółcienią tej kostki, ponieważ usilnie się tej żółcieni przyglądamy. Ideacja jest, jak mawiał Husserl, „ugruntowana" w spostrzeżeniu zmysłowym (Ingarden 1971, s. 288). Niemniej ideacja jest też w ważnym sensie niezależna od aktu widzenia. Przyglądając się kostce, możemy szczególnie zainteresować się jej żółcienią, a tym samym stracić z oczu całe jej otoczenie. Owa żółcień w akcie ideacji staje się „osobliwością samą dla siebie". Co więcej, wiele z jej otoczenia może podlegać zmianom, a ona pozostaje stała w naszym domniemaniu. Żółtą kostką możemy obracać, niemniej jej żółcień pozostaje tą samą żółcienią, ponieważ jest uchwycona, a zatem i obecna w akcie ideacji.

W ujęciu Ingardena nie ma znaczenia dla aktu ideacji żółcieni samej, czy kostka, której żółcień uchwytujemy, jest realną kostką wiszącą na suficie, czy kostką tylko wyobrażoną. Współcześnie powiedzielibyśmy, że może to być także kostka wirtualna, w ten lub inny sposób przedstawiająca się podmiotowi: może to być żółta kostka w grze komputerowej, dana za pośrednictwem gogli do wirtualnej rzeczywistości, które pozwalają na interaktywne „zanurzenie" w świat wirtualny. Istotne jest to, czy wyobrażenie lub wirtualne przedstawienie jest żywe i wyraźne. Wtedy bowiem można próbować dotrzeć do czystej jakości idealnej, gdy zakorzenimy naoczność w odpowiednio wyodrębnionej i w sobie specyficznej jakości. Bowiem owa wyobrażona żółcień musi posiadać jakiś odcień, jakieś nasycenie, aby stać się podstawą efektywnej ideacji czystej żółcieni (Ingarden 1971, s. 289–290). Zjawisko to można porównać do zbliżania i oddalania oglądanego właśnie zdjęcia: bez odpowiedniego przybliżenia jakiejś części zdjęcia, nie ma możliwości efektywnego wyróżnienia rysów twarzy utrwalonych na zdjęciu. Można powiedzieć, że podobnie jest w poznaniu matematycznym, bowiem tylko odpowiednio wyraźne zauważenie danej jakości lub zestawu jakości prowadzi do wartościowych rozpoznań[10].

Pomimo silnych powiązań prostego aktu spostrzegania, wyobrażenia czy wirtualnego zanurzenia oraz aktu ideacji czystych jakości, Ingarden (1971, s. 289–291) wskazał na wiele różnic pomiędzy tymi aktami. Różnice te są istotne dla poznania matematycznego, ponieważ poznanie matematycznych jakości nie jest prostym aktem widzenia (tak jak prostym aktem widzenia jest przyglądanie się żółtej kostce). Żółta kostka zawsze jest widziana z perspektywy takiej lub innej strony, w akcie ideacji zaś uchwytywana jakość idealna nie ma żadnych stron, jest jakby przezroczysta i dana cała naraz, jak twierdzi Ingarden. Aby adekwatnie rozpoznać jakości kostki, możemy ją obejść i obejrzeć z wielu stron; jakości idealnej zaś nie można oglądać z wielu stron, lecz jedyne, co można zrobić, to ją wyostrzać i uzmienniać (do czego wrócimy niedługo). Kostka w domniemaniu aktu spostrzeżenia ma ukryte wnętrze, żółcień zaś w akcie ideacji nie ma żadnego wnętrza, nie sposób w niej wyróżnić głębokości – w niej nic nie jest zakryte. Akt prostego widzenia przedstawia rzecz w tym lub innym świetle: taka a nie inna jasność ekranu komputerowego lub jasność wyświetlacza gogli powoduje, że rzeczy na nich przedstawione wyglądają inaczej, czyste zaś jakości idealne nie są dane przy pomocy wyglądów; one są dane w całej swej istności i bez zapośredniczeń. Nie mogą też być dane tylko częściowo. Wyglądy i okoliczności towarzyszące aktowi ideacji wpływają na to, czy akt ideacji dojdzie do skutku, czy nie dojdzie, nie wpływają zaś na samo rozpoznanie jakości idealnej (Ingarden 1971, s. 291). Stąd:

> Akt ideacji, skoro się raz efektywnie dokonał, jest autonomiczny w swej sprawności naocznego ukazywania danej w nim jakości idealnej. [...] Akt uchwycenia czystej jakości idealnej jest więc [...] autonomiczny, samowystarczalny i samoodpowiedzialny za to, iż w nim dana jest właśnie taka a nie inna jakość, która w całej swej pełni jest ukazywana (Ingarden 1971, s. 290–291).

Naturalnym pytaniem jest: czy – i jak – jakość idealna jest niezależna od aktu ideacji, w którym jest uchwytywana? Podmiot, który dokona aktu ideacji, nabiera, jak stwierdza Ingarden (1971, s. 288), „niezachwianego przeświadczenia, iż «jest» coś takiego, jak ta właśnie jakość". Ingarden wyjaśnia, że to „jest"

[10] O metaforze przybliżania i oddalania w kontekście wyjaśnień matematycznych w psychologii *Gestalt* piszemy w osobnej pracy (Skowron, Wójtowicz 2020).

nie oznacza, że oglądana żółta kostka istnieje tu i teraz lub jakość żółcieni jej przysługująca istnieje tu i teraz. Owo „jest" nie oznacza też, że jest ona możliwa, to znaczy, że możliwe jest jej zaistnienie w świecie realnym. Akt ideacji odbywa się równolegle do prostego aktu widzenia lub wyobrażenia, niemniej nie stwierdza on istnienia jakości idealnych, nie jest tym „zainteresowany". Istnienie kostki i jakości jej przysługujących nie jest „centralne" dla aktu ideacji: pozostawia on sprawę istnienia jakości idealnych i ich otoczenia nierozstrzygniętą. To, co jest istotne, wedle Ingardena, w uchwytywaniu jakości idealnych, to, jak już wspominaliśmy, żywość i wyraźność aktu widzenia lub wyobrażenia, czyli aktów, na których może się niejako zrodzić akt ideacji, a następnie ukazanie w ich treści tej właśnie jakości idealnej. Niezależnie od tego, sama jakość idealna nie jest częścią aktu ideacji, jest pewną całością, która jest w stosunku do niego zewnętrzna (zob. Ingarden 1971, s. 291). Z pewnością nie jest też, jak stwierdza Ingarden, ani wrażeniem, ani subiektywnym składnikiem przeżycia. Jakość idealna, jak na przykład czysta żółcień, do której dotarł podmiot dzięki widzeniu żółtej kostki, nie jest też częścią tej kostki.

Naoczne uchwycenie jakości idealnej w akcie ideacji jest pewne i zupełne. Jest też prawdziwe przynajmniej w tym sensie, że nie potrzebuje swojego potwierdzenia w aktach ideacji innych osób. Jest w tym sensie samowystarczalne (Ingarden 1971, s. 292–293). Gdy więc już dojdzie do aktu ideacji, to jakość okazuje się w pełni. Oczywiście nie jest to łatwe zadanie poznawcze; akty ideacji mogą być na różne sposoby zakłócane, a ich efektywne przeprowadzanie wymaga posiadania pewnych umiejętności. Podmiot powinien więc kształcić w sobie umiejętność przeprowadzania aktów ideacji (Ingarden 1971, s. 296) i poszerzać zespół jakości idealnych, którymi rozporządza. Naturalne jest też to, że zasób jakości idealnych, jakimi rozporządza dany podmiot, jest zawsze ograniczony. Wydaje się, że akty ideacji potwierdzają zwykłe codzienne doświadczenia osób uczących się: jedni z nas szybciej rozpoznają jakości matematyczne, inni wprawieni są w ideacji jakości dźwiękowych, jeszcze zaś inni – jakości wzrokowych. I jest oczywiste, że kompetentny matematyk posiada bez porównania większe zasoby jakości idealnych i większe umiejętności przeprowadzania aktów ideacji, niż laik.

2.2. Ideacja jakości matematycznych

Do tej pory rozważaliśmy za Ingardenem jakości pojawiające się w aktach spostrzeżenia wzrokowego. Są one związane najczęściej z barwnością przedmiotów, która często narzuca się jako pierwsza, gdy spoglądamy na jakiś przedmiot fizyczny. Zresztą jakości wzrokowe były i są darzone szczególnym zainteresowaniem fenomenologów. Jak jednak wygląda sprawa jakości czysto matematycznych, takich jak „równoległość prostych" lub sama „prostość" linii prostej w geometrii Euklidesa? Ingarden zastanawia się, czy tego typu jakości idealne są tak samo przejrzyste, jak jakości typu żółcieni. Wszak przyglądając się sześciennej kostce zauważamy jej przestrzenność, ta zaś ma wymiary, w szczególności głębokość. Co więcej, przestrzenna kostka sześcienna ma też strony, stąd może i jakość idealna sześcienności powinna takie strony posiadać? Powstaje naturalna trudność: czy jakości czysto matematyczne są dane w całości i naraz? Ingarden rozwiązuje tę trudność poprzez wskazanie na akt „wyostrzania" jakości idealnych. W aktach ideacji „wyłuskujemy" jakości idealne z konkretnego materiału naocznego (Ingarden 1971, s. 298) i doprecyzowujemy uchwytywane jakości tak, aby dojść do jednoznacznie wyznaczonej ich postaci. Intencja aktu ideacji niejako wykrawa z kontinuum doświadczanych jakości dokładnie te, na które się kieruje. Ingarden (1971, s. 299) nazywa to „myślowym przejściem do granicy". Jako przykład podaje wyodrębnienie pewnego odcienia zieleni w palecie barw, która jest bogata w wiele odcieni zieleni: intencja aktu ideacji może właśnie wskazać miejsce tego kontinuum i na nim skupić swoje zainteresowanie. W ten sposób, jak wyjaśnia Ingarden, intencja „wyostrza" zarówno swoje domniemanie, jak i odpowiednie jakości idealne.

Wyróżnienie jakości przestrzennych (a zarazem matematycznych) takich jak prostość linii prostej w geometrii euklidesowej wymaga specjalnego nastawienia. Można wskazać przynajmniej dwa możliwe nastawienia w akcie oglądania żółtej kostki: raz widzimy sześcienną żółcień, a raz żółtą sześcienność. Na tym drugim nastawieniu może być ufundowany akt ideacji swoiście matematycznej. Wyobraźmy sobie, że kostka sześcienna w jasnym pomieszczeniu zmienia swoje zabarwienie od szaroniebieskiego przez sinoniebieski i fioletowy aż do głębokiej czerni. Wtedy w specjalnym akcie ideacji możemy ująć to, co stałe, czyli sześcienność tej kostki, a na tej podstawie może się dokonać akt ideacji sześcienności. Czysta sześcienność staje się, jak powiedziałby Ingarden, „pobrzeżem", „granicą" zmieniającej się barwności. Wtedy nasze nastawienie wyróżnia strukturalnie właśnie sześcienność, a nie barwność, zaś akt ideacji rozważa tę sześcienność samą dla siebie, niezależnie od tego, czy są one podmiotem jakichkolwiek cech, lub jak mówi Ingarden (1971, s. 300), „w samej swej jakościowości". Dzięki temu możemy mówić o jakościach przestrzennych, mimo że w języku potocznym może to brzmieć nienaturalnie. Jest jednak jasne, że „jakości", o których traktuje Ingarden, są o wiele pojemniejszą kategorią niż kategoria „jakości" w języku potocznym. Na ideacjach jakości przestrzennych można, jak twierdzi Ingarden, budować geometrię:

> Toteż czysto przestrzenne „jakości" stanowią podstawę wszelkiej geometrycznej intuicji, jakkolwiek trzeba dokonać jeszcze jednego kroku, żeby na tej podstawie można było uprawiać geometrię jako dyscyplinę matematyczną i to dedukcyjną. Mianowicie trzeba spełnić pewną intencję ściśle związaną z czysto intuicyjną naocznością danej jakości przestrzennej, precy-

zującą ostro jej – że tak się wyrażę – „graniczność". Trzeba więc powziąć domniemanie idealizujące czy radykalizujące w pewnym duchu np. „prostość" linii euklidesowej, tak, że wówczas dopiero mamy wgląd w tę szczególną „prostość", która jedynie w euklidesowym typie przestrzeni może występować (Ingarden 1971, s. 301).

Jednym z przykładów jakości przestrzennych, które opisuje Ingarden (1971, s. 302), jest „płaskość" płaszczyzny euklidesowej. Dochodzimy, wedle niego, do uchwycenia „płaskości" poprzez wyobrażenie obracającej się prostej leżącej na tej płaszczyźnie – prostej obracającej się wokół jednego ze swych punktów. Dotrzemy do płaskości, jeśli owa obracająca się prosta nie wyjdzie poza tę płaszczyznę w żadnym ze swych punktów. Radykalizujemy tym samym swoje domniemanie, przyjmując, że prosta ta podczas obrotu w żadnym ze swych punktów nie opuści płaszczyzny: jest to graniczna i ścisła „intuicja ejdetyczna".

Naturalne staje się pytanie, czy posiadamy akty ideacji geometrii nieeuklidesowych. Ingarden (1971, s. 302) odpowiada, że do geometrii nieeuklidesowych dochodzimy przez pomyślenie innego rodzaju „równoległości", niemniej sam nie rozstrzyga, czy może to być oparte na wglądzie ejdetycznym. Wydaje się, że dziedzina aktów ideacji i jakości idealnych jest niezmiernie skomplikowana, już szczególnie dziedzina czystych jakości matematycznych. Bez wątpienia nie można jej ufundować w prostych aktach widzenia, takich jak wpatrywanie się w żółtą kostkę. Matematycy rozważają na co dzień jakości mające charakter geometryczno-topologiczny, jak ciągłość, spójność, zwartość, gęstość, symetryczność, oddzielalność, dla których można – przynajmniej w pewnym stopniu – uzyskać fundującą je naoczność. Niemniej matematycy rozważają też pojęcia, którym trudno przypisać źródła geometryczne: łączność działania algebraicznego, abelowość grupy, dowodliwość, prawdopodobieństwo, mierzalność, i wiele innych, których nie sposób sobie naocznie przedstawić. Nie są to też jakości proste – są to raczej bardzo złożone zespoły jakości, które konkretyzują się w zawartościach pewnych idei. Można więc powiedzieć, że analiza zawartości tych idei, a tym wedle Ingardena zajmuje się w zasadzie matematyk, jest analizą ejdetyczną. Stąd wszelkiego rodzaju nieklasyczne systemy, jak nieklasyczne logiki czy nieeuklidesowe geometrie, bada się również aktami ejdetycznymi, niemniej oderwanymi od ideacji prostych jakości idealnych.

Zachodzi tutaj istotne podobieństwo pomiędzy tezą Gödla, zgodnie z którą oglądanie przedmiotów matematycznych jest w jakimś sensie podobne do oglądania przedmiotów zmysłów, oraz opinią Ingardena i Husserla, że dochodzimy do czystych jakości idealnych poprzez akty ideacji ufundowane na aktach widzenia lub wyobrażenia. Gödel twierdził, że w jakiś sposób postrzegamy również nienaoczne konstrukcje, takie jak konstrukcje teoriomnogościowe, np. uniwersum konstruowalne. Nie jest to oczywiście percepcja taka, jak percepcja żółtej kostki, niemniej, jak zapewne powiedziałby Ingarden, jest to analiza zawartości idei, to znaczy idealnie skonkretyzowanych zespołów jakości idealnych. Oczywiście, z punktu widzenia empirystycznie nastawionych filozofów matematyki (jak Quine czy neopozytywiści) mówienie o owych aktach poznawczych czy o zawartościach idei jest pozbawione podstaw: analizy ontologiczne powinny być prowadzone zupełnie inaczej. Z kolei z perspektywy filozofii Ingardena, „pustynia" Quine'a jest w istocie ontologicznym pustkowiem – zubożonym i zafałszowanym. Warto wspomnieć na marginesie, że krytyczny stosunek do pomysłów Quine'a miał również Saunders Mac Lane (1997, s. 151–152), jeden z największych amerykańskich matematyków XX wieku, który zresztą był członkiem nominującym Gödla do Narodowego Medalu Nauki przyznawanego przez Narodową Akademię Nauk[11]. Mac Lane formułował nieco inne zarzuty: filozofowie matematyki, skupiając swoją uwagę tylko na logicznych podstawach matematyki, zbyt oddalili się od samej matematyki. W tym momencie przychodzi na myśl fenomenologiczne motto: „z powrotem do rzeczy samych!"

2.3. Współwystępowanie i związki jakości idealnych

Między jakościami idealnymi zachodzą związki o charakterze przygodnym lub koniecznym. Barwa niebieska jest przez niektórych synestetów doświadczana wraz z chłodem, inni odbierają dźwięki w zabarwieniu: w ten sposób doświadczają nieoczywistych połączeń pomiędzy jakościami różnych zmysłów. Ingarden (1971, s. 306–309) bada tego typu związki, wskazując na różnego rodzaju relacje łączące i dzielące jakości. Ton skrzypcowy o wysokości *a* jest przez niektórych odbierany jako czerwony, choć nie jest przecież w konieczny sposób stopiony z czerwienią. Można tu raczej mówić o pewnego rodzaju „osadzeniu" koloru na utworze dźwiękowym. Tymczasem i fenomenologów, i matematyków najbardziej interesują związki konieczne, ponieważ to właśnie one są źródłem owego „oporu", o którym mówią zawodowi matematycy. Jakości idealne mogą się bowiem ze sobą łączyć i wykluczać w sposób konieczny: te konieczne współwystępowania i wykluczania się są właściwym przedmiotem ejdetycznego oglądu.

Ejdetyczny ogląd wychodzi poza ideację, która jest uchwytywaniem czystych jakości idealnych. Do pełnego poznania ejdetycznego potrzebna jest jeszcze co najmniej jedna ważna operacja poznawcza: operacja „uzmienniania". Ingarden twierdzi, że mieści się ona jakby pomiędzy intuicją i dedukcją w rozumieniu Kartezjusza. Nie jest dedukcją, którą Ingarden ujmuje jako operację:

> przechodzenia od jednej danej intuicyjnej do innej, czy też od jednego intuicyjnie danego zespołu jakości do innego zespołu również intuicyjnie uchwytywanego, przechodzenia przy

[11] Co więcej, ze względu na chorobę Gödla, Mac Lane w jego imieniu odebrał ten medal 18 września 1975 r. z rąk prezydenta Geralda Forda.

tym, którego kierunek jest wyznaczony przez zawartość pierwszego zespołu i umożliwia przez to też intuicję związku między nimi (właśnie „wynikania") (Ingarden 1971, s. 310)[12].

Nie jest też prostym aktem ideacji (intuicją), ponieważ zawiera myślowy składnik: samo oglądanie czystej jakości idealnej w ideacji nie wystarczy do przeprowadzenia uzmiennienia. Jednak gdy ideacja i uzmiennianie już powiążą się ze sobą, to akt uzmienniania musi zostać na nowo stwierdzony w intuicji ejdetycznej, czyli, jak pisze Ingarden (1971, s. 310), w „widzeniu".

W akcie ideacji jakości idealnej długości boku trójkąta wynoszącej 5 cm możemy uzmiennić długość boku i w ten sposób otrzymamy trójkątność o „jakiejś" długości boków. Mając dany zespół jakości, możemy uzmienniać pewne jakości występujące w danym rodzaju i sprawdzać, czy to w ogóle jest możliwe oraz co się wtedy wydarza z innymi jakościami występującymi w innych rodzajach. Czy pozostają one niezmienne i zespolone z wyjściowymi jakościami, czy może w obrębie swojego rodzaju też podlegają uzmiennieniu, a być może w ogóle się nie pojawiają, lecz zostają zastąpione jakościami innych rodzajów? Mówiąc słowami Ingardena:

Operacja „uzmienniania" polega na tym, iż wychodząc od pewnej jakości idealnej, np. „jasności" barwy lub „wysokości" tonu, staramy się przejść od jednej określonej jakości pewnego rodzaju, a więc np. od określonej wysokości tonu, do innych jakości tego samego rodzaju, i – że się tak wyrażę – zastosować je do danego zespołu jakościowego. Postępowanie takie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy jakość *j* jest szczegółowym przypadkiem pewnego rodzaju jakości *J*, który dopuszcza wiele innych przypadków szczegółowych. Korelatywnie: operacja „uzmienniania" da się dokonać wtedy i tylko wtedy, jeżeli w danym zespole jakościowym, w którym występuje m.in. jakość *j*, da się wypatrzyć przez szczególnego rodzaju „abstrahującą" ideację rodzajowy moment *J*, tak iż szereg różnych jakości j_n, j_m, j_r ... można od razu pojąć jako „odmianę" (wariację) rodzaju *J*, a nie jako serię różnorodnych momentów, które nie stanowią odmian czegoś tego samego (Ingarden 1971, s. 311).

Ten schemat można zastosować do analizy jakości matematycznych. Rozważmy trójkątność jako jakość oraz przeprowadźmy jej uzmiennienie: trójkątność o dowolnej długości boków. Chwila uwagi wystarczy, aby zauważyć, że tak uzmienniona trójkątność w pełnej ogólności nie jest możliwa. Nie ma bowiem trójkątów w geometrii euklidesowej o dowolnej długości boków: z zestawu odcinków o długości 1 cm, 3 cm oraz 10 cm nie można zbudować trójkąta, nie spełnia on bowiem nierówności trójkąta, w której suma każdych dwóch boków musi być równa co najmniej długości trzeciego. Uzmiennianie nie może być więc dowolne, nie jest to frywolny akt fantazji. Opiera się on na wcześniej-

[12] Warto zestawić ten opis dedukcji z definicją dedukcji obecną w pracach głównego nurtu filozofii matematyki i logiki. Wątek ten mógłby być podstawą osobnej pracy, do której zachęcamy Czytelnika.

szym doświadczeniu matematyka, który dysponuje już jakimś rozpoznaniem struktury badanego przedmiotu. Jak mówi Ingarden:

> Może się to np. dokonać na podstawie uzyskanego już zrozumienia budowy uposażenia danego przedmiotu i wykrycia, iż moment, który ma zostać „ustalony", odgrywa szczególnie doniosłą rolę w tym uposażeniu (Ingarden 1971, s. 313).

Swoboda w decydowaniu o uzmiennianym momencie jest istotnie ograniczona możliwością efektywnego przeprowadzenia owego uzmienniania. Przypadki nieudanego uzmienniania mogą prowadzić nawet do zniszczenia przedmiotu, lub jak mawiał Husserl, „eksplozji" przedmiotu (Ingarden 1971, s. 313). To zaś z pewnością nie prowadzi do poznania prawdziwego (choć bez wątpienia też coś o przedmiocie mówi). Do podsumowania wykorzystajmy znów słowa Ingardena:

> [...] operacja uzmienniania jakości pewnego rodzaju nie może być zupełnie swobodna i posługiwać się jedynie wyobraźnią, lecz musi powstawać w granicach wyznaczonych przez ustalenie pewnych konstytutywnych cech przedmiotu, których konstytutywność winna być wyświetlona na podstawie analizy materiału dostarczonego [...] (Ingarden 1971, s. 315–316).

W wypadku matematyki owo uzmiennianie przyjmuje wiele form i odmian. Ingarden, pomimo tego, że podawał raczej elementarne przykłady jakości matematycznych, zdawał sobie w pełni z tego sprawę. Procesy te są jednak opisywane w szczegółach przez zawodowych matematyków. W tym miejscu zwrócimy tylko uwagę na pewną typologię uzmienniania, którą zaproponował Mac Lane. Nie odwoływał się on wprawdzie do opisów fenomenologów (filozofowie matematyki rzadko to robią), niemniej, opierając się na swoim własnym doświadczeniu matematycznym, zaproponował ciekawe uzupełnienie i uszczegółowienie rozważań fenomenologicznych (choć sam tak o swoich rozważaniach nie myślał). Otóż Mac Lane (1986, s. 434–438) wyróżnił uogólnianie i abstrahowanie. Uogólnianie może następować „przez przypadki": tak dzieje się np. wtedy, gdy obserwacja trójkątów prostokątnych o określonych długościach boków, jak np. 3, 4 oraz 5, prowadzi do twierdzenia Pitagorasa w ogólności: $a^2+b^2=c^2$. Wśród bardziej zaawansowanego uogólniania przez przypadki Mac Lane wymienia przykład odkrycia reprezentacji skończonych grup abelowych, jako produktów grup cyklicznych (w wyniku analizy szeregu przykładów w teorii liczb). Oprócz uogólniania przez przypadki, Mac Lane wyróżnia uogólnianie „przez kroki analogiczne" oraz uogólnianie „przez modyfikację". W abstrahowaniu zaś wyróżnia abstrahowanie „przez usuwanie" (*resp.* pomijanie), abstrahowanie „przez analogię" oraz abstrahowanie „przez przesunięcie uwagi". Kolejnym przykładem techniki powiązanej z uzmiennianiem niech będzie analizowany przez Zbigniewa Semadeniego (2007) mechanizm „zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie". Semadeni analizuje fakt zastąpienia np. punktu przez ciąg liczb lub wektor, zastąpienie sinusa kąta przez sinus jego miary, który następnie zostaje zastąpiony przez sinus liczby rzeczywistej. Potrzeba wprawnego oka, jak twierdzi Semadeni, aby te różnice zauważyć. Ingarden zapewne powiedziałby, że różnice te zachodzą na poziomie radykalizacji w uchwytywaniu czystych jakości idealnych i ich powiązań oraz następczo w różnicach w sposobie analizy zawartości odpowiednich idei. Gödel wskazałby może w tym miejscu przykłady, kiedy to konieczne jest odwoływanie się do coraz silniejszych systemów formalnych, aby móc rozstrzygać pojawiające się problemy matematyczne. I oczywiście owe odwołania nie miałyby charakteru czysto technicznego: uzasadnienie coraz silniejszych aksjomatów (takich jak np. aksjomaty dużych liczb kardynalnych w teorii mnogości) odbywałoby się w znacznym stopniu poprzez analizy pozaformalne, związane z próbą „wniknięcia" w sens pojęć matematycznych. Dzięki temu coraz lepiej rozumiemy pojęcia matematyczne – i coraz lepiej postrzegamy matematyczną rzeczywistość.

2.4. Analiza zawartości idei

Ingarden był teoretykiem idei. W pierwszym tomie *Sporu o istnienie świata* (Ingarden 1960, s. 54) stwierdza w przypisie, że wedle jego wiedzy to on jako pierwszy zwrócił uwagę na pewne składniki budowy idei i dzięki temu uwolnił teorię idei od zarzutów, które sformułował Platon w *Parmenidesie*. Ingarden przede wszystkim (1960, s. 51–56) wyróżnił w ideach dwie strony formalne (w specyficznym, Ingardenowskim sensie „formy", jako czegoś zupełnie niejakościowego): z jednej strony idee są pozaczasowe, niezmienne, ogólne (nieindywidualne), idealne, posiadające dwustronną budowę formalną itp., z drugiej strony posiadają pewną „zawartość". To zawartość sprawia, że idee odnoszą się do tych a nie innych przedmiotów; przedmioty też zaś pod idee o odpowiednich zawartościach podpadają. Zawartość idei, co warto podnieść, ma szczególne znaczenie ontologiczne, ponieważ:

> Zawartość idei jest tym jedynym miejscem w całokształcie bytu, gdzie konkretyzują się czyste możliwości, mające swe źródło w jakościach idealnych (Ingarden 1960, s. 55).

W zawartościach idei Ingarden wyróżnia „stałe" i „zmienne", i to właśnie z tego wyróżnienia był słusznie tak dumny. Ontologicznie rzecz ujmując, stała w zawartości idei jest konkretyzacją idealną (ponieważ zachodzi w istniejącej w sposób idealny idei) pewnej określonej jakości idealnej, a zmienną zawartości idei jest konkretyzacja „czystej możliwości konkretyzacji (lub realizacji) w odpowiednim przedmiocie indywidualnym pewnej jakości idealnej [...]" (Ingarden 1960, s. 54). W zawartości idei grupy algebraicznej stałą jest np. łączność działania, niemniej przemienność działania już stałą nie jest, ponieważ istnieją grupy nieabelowe, których działania nie są przemienne; stałą jest co najwyżej to, że działanie grupowe może być przemienne lub nieprzemienne. Gra stałych i zmiennych w zawartości idei odbija się w związkach koniecznych, zachodzących między odpowiednimi jakościami idealnymi. Ingarden (1960, s. 55) podaje jako przykład związku koniecznego w zawartości idei trójkąta zależność pomiędzy stałą zawartości „trójkątność" oraz stałą zawartości „trójboczność". Istotne jest to, że konieczne stosunki zachodzące pomiędzy składnikami zawartości idei przenoszą się na konieczne stosunki pomiędzy składnikami przedmiotów indywidualnych (zarówno realnych, jak idealnych) podpadających pod te idee – stąd zagadnienie idei i ich roli w poznaniu jest ważne nie tylko dla nauk apriorycznych, ale też dla nauk przyrodniczych. Tutaj też Ingarden, niejako mimochodem, proponuje oryginalne i przekonujące rozwiązanie dyskutowanego w głównym nurcie filozofii matematyki problemu „niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych" (Wigner 1961).

Świat idei nie jest prosty. Idee różnią się co do ogólności, ścisłości oraz – rzecz jasna – co do zawartości. Ogólność wyznacza pewien porządek w świecie idei: są idee bardziej ogólne i idee mniej ogólne. Ścisłość idei zależy od tego, jak silnie powiązane są ze sobą odpowiednie sploty jakości skonkretyzowane w danej zawartości; im więcej spójności i powiązań, tym idea ściślejsza. W stałych i zmiennych zawartości idei Ingarden wyróżnia też momenty formalne, materialne i egzystencjalne, które odzwierciedlają trójjednię wszelkich jestestw w jego ontologii. Zawartości idei sprawiają też, że idee wchodzą w pewne zależności pomiędzy sobą: wątek ten nie jest jednak szczegółowo opracowany i wymaga, jak się wydaje, podjęcia[13].

Idee nie są przedmiotami matematycznymi, „kwadratowość" jest ideą, której zawartość bada matematyk po to, aby mieć rozpoznanie indywidualnych kwadratów, które w przeciwieństwie do idei, nie są przedmiotami ogólnymi. Indywidualne i jednostkowe kwadraty nie zawierają zmiennych w swoim uposażeniu. Poznanie matematyczne zawiera w sobie zatem, oprócz wcześniej analizowanych momentów, a w tym wykrywania zawartości idei, także doświadczanie indywidualnych przedmiotów matematycznych. W stałej zawartości idei „kwadratowość" zauważamy szczególny kształt, który jest momentem jakościowym indywidualnych i jednostkowych kwadratów podpadających pod tę ideę. Ta stała „rozstrzyga" (Ingarden 1971, s. 323), że istnieją też inne stałe w zawartości tej idei, np. czworoboczność, niemniej rozstrzyga też o możliwym zakresie zmiennych materialnych w zawartości tej idei – ilość boków nie może być zmienną w idei „kwadratowość", lecz długość boków może. Innymi stałymi w zawartości tej idei jest na przykład posiadanie dwóch przekątnych lub to, że przekątne przecinają się w połowach swych długości.

[13] Próba analizy tego wątku została podjęta w innej pracy (Skowron 2015).

Występowanie tych stałych jest połączone koniecznymi związkami. Ingarden sądzi, że praca badaczy:

> skierowuje się przede wszystkim na ustalenie związków między stałymi zawartości pewnej grupy idei, natomiast stosunkowo mało zainteresowania istnieje dla związków i zależności między zmiennymi zawartości wchodzących w grę idei (Ingarden 1971, s. 324).

Nastawienie badaczy raczej na stałe, niż na zmienne w zawartościach można w matematyce spróbować oddać jako nastawienie na „przedmioty matematyczne", a nie na „przekształcenia". Gdyby ująć przedmioty matematyczne jako idealne artefakty przekształceń, to wtedy można by powiedzieć, że matematycy nakierowują swoją uwagę na zmienne zawartości idei. W przypadku geometrii, którą szczególnie upodobał sobie Ingarden, tego typu ujęcie przeprowadzone zostało w programie erlangeńskim Felixa Kleina (1872 r.), gdzie, mówiąc w uproszczeniu, pierwotnym obiektem są przekształcenia, a przedmioty powstają jako ich artefakty. Geometra w tym ujęciu bada niezmienniki grup przekształceń, a nie figury geometryczne. To nastawienie, rozciągnięte na całą matematykę, a nie tylko geometrię, zaproponowali Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane (1945) we wspólnym artykule *General Theory of Natural Equivalences*. Artykuł ten stanowi początek teorii kategorii, która istotnie wpłynęła na postawy i filozofię matematyki w ostatnich dziesięcioleciach. Ingarden wprawdzie wspomina o teorii kategorii marginalnie (Ingarden 1971, s. 325), niemniej bez wątpienia kategoryjne ujęcie matematyki istotnie rewiduje jego przekonanie o nastawieniu badaczy na stałe w zawartościach idei. Wątek ten jednak zasługuje na osobne omówienie (zob. Skowron, manuskrypt).

Geometria dla Ingardena nie jest niczym innym, jak „analizą zawartości pewnej grupy idei" (Ingarden 1971, s. 324). To wynik analizy zawartości idei prowadzi do aksjomatów teorii matematycznych, a także niektórych twierdzeń z tych aksjomatów wynikających. Oczywiście matematyk dowodząc twierdzenia, a tym najczęściej się zajmuje, nie jest ciągle skupiony na zawartościach odpowiednich idei, raczej jest tak, że te analizy umożliwiają prowadzenie dowodu w tej lub innej szacie formalnej. Ejdetyczna analiza zawartości idei jest specyficznym nastawieniem, które funduje i usensownia dowodzenie twierdzeń, jednak go nie zastępuje. Niezależnie od tego, robota w nastawieniu ejdetycznym, czyli nastawieniu na konieczne i pierwotne związki między jakościami idealnymi, nie jest chyba doceniana przez filozofów matematyki i samych matematyków. Jak stwierdza Ingarden:

> [...] dziś na ogół zatracono już świadomość, w jak wielkiej mierze zdobycze matematyki spoczywają ostatecznie na ejdetycznych wglądach w pierwotne związki między jakościami idealnymi i – jak wiadomo – modne jest zaprzeczanie roli i wadze ejdetycznego poznania w ideacji pierwotnych jakości idealnych. Całe poznanie matematyczne usiłuje się sprowadzić do konwencjonalnie budowanych formalnych systemów dedukcyjnych przez rzekomo umow-

ne ustalanie systemów aksjomatów i formalnie pojęte i zmechanizowane operacje „dedukowania", które mają zastąpić rzekomo zawodną „intuicję" (Ingarden 1971, s. 324; cytat dostosowano do współczesnych zasad pisowni).

Podobne było stanowisko Gödla: celem badań matematycznych nie jest bynajmniej tworzenie formalnych systemów i dedukowanie z nich twierdzeń, ale badanie matematycznej rzeczywistości. Oczywiście stworzenie dowodu formalnego jest nieodłącznym fragmentem uprawiania matematyki – jednak u podłoża aksjomatów i systemów formalnych leży matematyczna rzeczywistość. Pozytywistycznie nastawieni badacze, np. filozofujący przyrodnicy, doprowadzili wedle Ingardena (1971, s. 326–327) do popularnego filozoficznego przekonania, że nie idzie o żadne poznanie aprioryczne, które jest w ich opinii platońskim zabobonem, tylko o to, że w poznaniu tworzymy ogólne pojęcia przyglądając się jednostkowym przypadkom. To, co wspólne danym przypadkom, łączymy w jedno „pojęcie ogólne", zawierające wszystkie określone przypadki w sobie, i w taki sposób wyjaśniamy poznawanie jako takie. Ingarden (1971, s. 327) zwraca uwagę, że takie ujęcie „zbierające cechy wspólne" (a w konsekwencji stanowiące „klasowe" ujęcie przedmiotu) gubi ważną właściwość poznania: gubi konieczne związki, w których ufundowana jest matematyka, ale też inne nauki. Matematyka (i ogólnie nauka) w tym ujęciu jest bowiem wynikiem przypadkowego przebiegu doświadczenia, a nie nieprzypadkowych związków pomiędzy odpowiednimi jakościami idealnymi. W przypadku poznania matematycznego tego typu przekonanie ujawnia się jako nadmierne zaufanie do formalizmu, który czasem wprawdzie prowadzi do ciekawych wyników, niemniej nie odkrywa fundujących te wyniki pierwotnych związków i zależności. Przywołajmy jeszcze raz słowa Gödla (1953/1959, s. 358): „jest jasne, że intuicja matematyczna nie może zostać zastąpiona przez konwencje, ale jedynie przez konwencje plus intuicję matematyczną". W przypadku nauk przyrodniczych takie nastawienie, jak możemy się domyślać, przejawiałoby się ślepym zaufaniem do pojedynczych eksperymentów i doświadczeń, bez żadnej choćby próby odnalezienia związków i prawidłowości występujących pomiędzy wynikami doświadczeń. Można tutaj odnaleźć podobieństwo z uwagami Gödla dotyczącymi braku postępów w prawdziwym rozumieniu i skupiania się na gromadzeniu informacji, bez prób głębszego wniknięcia w istotę rzeczy.

3. Podsumowanie

Gödel podkreślał rolę i znaczenie intuicji matematycznej – prowadzącej do wglądów, dzięki którym docieramy do świata przedmiotów matematyki. Wyrażał też nadzieję, że metoda fenomenologiczna pozwoli na wyjaśnienie natury poznania matematycznego. Nie stworzył jednak systemu. Natomiast Ingarden, rozwijając myśl Husserla oraz wykorzystując swoją ontologię, zbadał tę intuicję i szczegółowo ją opisał. Wyróżnił ogląd czystych jakości idealnych, analizę zawartości idei oraz ważny dla matematyki myślowy proces uzmienniania. Wskazał też na różnice i podobieństwa pomiędzy aktami ideacji a prostymi aktami widzenia, potwierdzając tym samym przekonanie Gödla o podobieństwach zachodzących pomiędzy percepcją zmysłową a poznaniem matematycznym. Ingarden zaangażował wiele struktur ontologicznych do opisu procesu poznania matematycznego, w szczególności czyste jakości idealne, ich zespoły, idee z ich zawartościami oraz same przedmioty matematyczne. Wyłaniający się z analiz Ingardenowskich obraz matematyki jest daleki od „pustynnego krajobrazu" Quine'a. Trudno na pustyni mierzyć się z „oporem materii" – a to przecież jest codzienne doświadczenie zawodowych matematyków. Matematyka u Ingardena jest bogatą, niewyczerpywalną, rozłożystą i urodzajną siecią apriorycznych zależności, raczej zadrzewioną oazą, niż pustynią. Matematyk mierzy się z bogatą różnorodnością rozciągającą się nad horyzontem możliwych kombinacji stałych i zmiennych w zawartościach idei. Zmaga się z zawartościami idei, często się potyka, niemniej czasem utrafia w konieczne zależności pomiędzy skonkretyzowanymi zespołami jakości idealnych. To nie konwencje, formalizmy czy nawet systemy dedukcyjne sprawiają, że ma się poczucie obcowania ze stawiającą opór materią, zewnętrzną w stosunku do świadomości. Opór ten ma źródło w aprioryczności i idealności matematyki, a to one zwykle prowadzą do realizmu matematycznego. Niezależnie od tego, czy taka bogata perspektywa ontologiczna jest możliwa do zaakceptowania, bez wątpienia analizy Ingardena rzucają ciekawe światło na współcześnie rozpatrywane zagadnienia z zakresu filozofii matematyki.

W artykule rozważaliśmy przede wszystkim strukturę poznania matematycznego, wyróżniając za Ingardenem akty ideacji i oglądu ejdetycznego. Uważamy przy tym, że w myśli Ingardena można znaleźć wiele ważnych dla filozofii matematyki ustaleń, o których nie wspomnieliśmy. Ingardenowskie analizy znaczenia, w tym znaczenia nazw i zdań przedstawione w jego *O dziele literackim* w rozdz. V: „Warstwa tworów znaczeniowych" (Ingarden 1988, s. 99–247) mogą rzucić nowe światło także na zagadnienie znaczenia w matematyce. Ingardenowska koncepcja przedmiotu czysto intencjonalnego w naturalny sposób może być wykorzystywana w ontologicznych analizach przedmiotów matematycznych (zob. ważne prace: Błaszczyk 2005, 2009, 2010; zob. też prace tam cytowane); rzuciłaby też nowe światło na dyskutowane w filozofii matematyki stanowisko fikcjonalizmu[14]. Problem prawdziwości twierdzeń matematycznych oraz uprawomocnienia tej prawdziwości również mógłby zostać poddany analizie z innej perspektywy niż teoriomodelowa[15]. Zagadnienie swoistej ontologizacji logiki, której dokonał Ingarden (zob. Skowron 2014, s. 320–340), mogłoby mieć ważny wkład do współczesnych dyskusji z zakresu filozofii logiki. Ingardenowskie analizy idei oraz jakości idealnych wnoszą wiele nowych wątków do klasycznego zagadnienia platonizmu w matematyce (zob. Król 2006, 2015; Semadeni 2012, 2018; Wójtowicz 2002, 2003). Dopracowania wymaga też poszerzenie wyników analiz Ingardena, które w znacznym stopniu dotyczą jakości geometrycznych, a nie jakości matematycznych w ich ogólności i zróżnicowaniu. Wypracowane przez Ingardena narzędzia ontologiczne (zarówno ontologia egzystencjalna, materialna, jak i formalna) pozwalają na przeprowadzenie szczegółowych analiz, które mogłyby wzbogacić klasyczne dyskusje w filozofii matematyki – w szczególności zagadnienia związane ze sposobem istnienia przedmiotu matematycznego, jego formą, a także jego uposażeniem jakościowym.

Bogata ontologia Ingardena umożliwia systematyczną analizę chyba każdego ontologicznego wątku obecnego we współczesnych debatach. Podjęcie tej tematyki pozwoliłoby wzbogacić dyskusje toczone w głównym nurcie filozofii matematyki, a jednocześnie mogłoby ożywić badania nad spuścizną Ingardena.

Bibliografia

Błaszczyk P. (2005), *O sposobie istnienia liczb rzeczywistych*, w: A.T. Tymieniecka (red.), *Logos of Phenomenology and Phenomenology of the Logos*, Book One, „Analecta Husserliana" (The Yearbook of Phenomenological Research) 88, Dordrecht: Springer, https://doi.org/10.1007/1-4020-3680-9_8

Błaszczyk P. (2009), *Fragmenty ontologii Ingardena: o miejscach niedookreślenia przedmiotu czysto intencjonalnego*, „Filozofia Nauki" 17 (4), s. 71–93.

[14] Mówiąc bardzo ogólnie, zasadnicza teza fikcjonalistów jest prosta: pojęcia matematyczne dotyczą pewnych fikcji (użytecznych w nauce!), a rozumowania matematyczne przypominają rozumowania prowadzone w odniesieniu do np. bohaterów literackich (o których nie mamy pełnej wiedzy, ale na temat których możemy wnioskować na podstawie dostępnych informacji) (por. np. Bueno 2009).

[15] Ciekawe jest też, że Gödel miał stosunkowo krytyczne podejście do definicji prawdy w ujęciu Tarskiego. Szczegółowe rozważania można znaleźć w książce Stanisława Krajewskiego (2003, s. 221–242). Autor ten przytacza w szczególności uwagi Jaakko Hintikki, zgodnie z którymi Gödel pozostał wierny idei logiki i języka jako uniwersalnego medium – a to wiąże się z założeniem, iż język matematyczny nie jest po prostu interpretowany w różnych dziedzinach, ale w obiektywnym świecie matematycznym (por. Hintikka 1997).

Błaszczyk P. (2010), *Liczby rzeczywiste jako przedmiot intencjonalny*, „Analiza i Egzystencja" 11, s. 235–261.

Bueno O. (2009), *Mathematical Fictionalism*, w: O. Bueno, Ø. Linnebo (red.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Hampshire: Palgrave Macmillan, s. 59–79.

Detlefsen M. (2005), *Formalism*, w: S. Shapiro (red.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, s. 236–317.

Eilenberg S., Mac Lane S. (1945), *General Theory of Natural Equivalences*, „Transactions of the American Mathematical Society" 58, s. 231–294.

Føllesdal D. (1995a), *Gödel and Husserl*, w: J. Hintikka (red.), *Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, s. 427–446.

Føllesdal D. (1995b), *Introductory note to *1961*, w: K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press 1995, s. 364–373.

Gödel K. (1947/1964), *What is Cantor's Continuum Problem?*, „American Mathematical Monthly" 54, s. 515–525. Przedruk w: P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., s. 258–272. Tłum. pol. K. Gödel, *Co to jest Cantora problem kontinuum?*, w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Warszawa: PWN 2002, s. 103–123.

Gödel K. (1951), *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, w: K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press 1995, s. 304–323. Tłum. pol. *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących*, „Studia Semiotyczne" 2018, t. XXXII, nr 2, s. 9–32.

Gödel K. (1953/1959), *Is mathematics syntax of language?*, w: K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press 1995, s. 334–363.

Gödel K. (1961), *The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy*, w: K. Gödel, *Collected Works*, vol. 3, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press 1995, s. 374–387.

Gödel K. (1986), *Collected Works*, vol. 1, red. S. Feferman i in., New York: Clarendon Press; Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1990), *Collected Works*, vol. 2, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press.

Gödel K. (1995), *Collected Works*, vol. 3, red. S. Feferman i in., Oxford: Oxford University Press.

Hammond A.L. (1983), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, w: L.A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 26–48.

Hardy G.H. (1929), *Mathematical proof*, „Mind" 38, s. 1–25.

Ingarden R. (1960), *Spór o istnienie świata*, t. I, Warszawa: PWN.

Ingarden R. (1961), *Spór o istnienie świata*, t. II, Warszawa: PWN.

Ingarden R. (1971), *U podstaw teorii poznania*, Warszawa: PWN.

Ingarden R. (1988), *O dziele literackim. Badania z pogranicza ontologii, teorii języka i filozofii literatury*, Warszawa: PWN.

Krajewski S. (2003), *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Król Z. (2006), *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Król Z. (2015), *Platonism and the Development of Mathematics. Geometry and Infinity*, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN.

Mac Lane S. (1986), *Mathematics. Form and Function*, New York: Springer.

Mac Lane S. (1997), *Despite Physicists, Proof is Essential in Mathematics*, „Synthese" 111 (2), s. 147–154, https://doi.org/10.1023/A:1004918402670

Murawski R. (1984), *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 11–12 (8–9), s. 75–88.

Rota G.-C. (1992), *Husserl*, w: M. Kac, G.-C. Rota, J. Schwartz (red.), *Discrete Thoughts. Essays on Mathematics, Science, and Philosophy*, wyd. 2, red. P. Renz, Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.

Semadeni Z. (2007). *Zjawisko zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie*, „Didactica Mathematicae" 30, s. 7–45.

Semadeni Z. (2012), *Koncepcja idei głębokich epistemicznych i idei głębokich indywidualnych w matematyce*, „Filozofia Nauki" 4 (80), s. 119–138.

Semadeni Z. (2018), *Platonizujący konceptualizm w matematyce*, w: R. Murawski, J. Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, s. 77–95.

Skowron B. (2014), *Fenomenologia i logika*, w: W. Płotka (red.), *Wprowadzenie do fenomenologii. Interpretacje, zastosowania, problemy*, t. 2, Warszawa: Wydawnictwo IFiS PAN, s. 295–341.

Skowron B. (2015), *Using Mathematical Modeling as an Example of Qualitative Reasoning in Metaphysics. A Note on a Defense of the Theory of Ideas*, „Annals of Computer Science and Information Systems" 7, s. 65–68, http://doi.org/10.15439/978-83-60810-78-1

Skowron B. (2018a), *Gestalty w matematyce. O unifikującej sile sprzężeń funktorowych*, w: R. Murawski, J. Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki*, Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM, s. 165–175.

Skowron B. (2018b), *Możliwościowe ujęcie logiki praktycznej. Logika bez kantów Andrzeja Kisielewicza*, „Studia Philosophica Wratislaviensia" 3, s. 95–114, http://doi.org/10.19195/1895-8001.13.3.10

Skowron B. (manuskrypt), *Sieć kategorii. Platonizująca interpretacja ontologii matematyki Saundersa Mac Lane'a*.

Skowron B., Wójtowicz K. (2020), *Throwing spatial light: On topological explanation in Gestalt psychology*, „Phenomenology and the Cognitive Sciences" (online-first), https://link.springer.com/article/10.1007/s11097-020-09691-1

Tieszen R. (1992), *Kurt Gödel and phenomenology*, „Philosophy of Science" 59, s. 176–194.

Tieszen R. (1998), *Gödel's path from the incompleteness theorems (1931) to phenomenology (1961)*, „The Bulletin of Symbolic Logic" 4, s. 181–203.

Wang H. (1987), *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, MA: The MIT Press.

Wang H. (1996), *A logical journey. From Gödel to Philosophy*, Cambridge, MA: The MIT Press.

Wigner E.P. (1960), *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics" 13, s. 1–14. Tłum.

pol. *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, w: R. Murawski (red.), *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, s. 293–309.

Woleński J. (1980), *Krytyczne uwagi o Ingardenowskiej krytyce logiki*, w: E. Żarnecka-Biały (red.), *Logika i jej nauczanie w dziejach Uniwersytetu Jagiellońskiego*, Kraków, s. 109–121.

Wójtowicz K. (1996), *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" XIX, s. 24–45.

Wójtowicz K. (2002), *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Tarnów: Biblos.

Wójtowicz K. (2003), *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe Semper.

Wójtowicz K. (2004), *O najważniejszym argumencie na rzecz matematycznego realizmu*, „Filozofia Nauki" 2, s. 31–48.

Wójtowicz K. (2018), *Kategoria wyjaśniania w filozofii matematyki Kurta Gödla*, „Studia Semiotyczne" XXXII, nr 2, s. 107–129.

Bartłomiej Skowron,
Krzysztof Wójtowicz

Realism in the philosophy of mathematics: Gödel and Ingarden

Keywords: *eidetic intuition, K. Gödel, ideal qualities, ideas, R. Ingarden, mathematical intuition*

The problem of the existence of mathematical entities is the subject of lively discussions. Realists defend the independence and autonomy of mathematical objects, while anti-realists point to their dependence and conventionality. The problem of the existence of mathematical objects is also strongly linked to the problem of mathematical cognition: do we recognize mathematical truths in special acts of intuition, as some realists claim, or do we create mathematical knowledge only by building appropriate formal systems – as some anti-realists imagine? In this article we present the K. Gödel's and W.V. Quine's realistic stances and comment on them from the perspective of Roman Ingarden's phenomenology. We point out the role that Gödel attributed to his mathematical intuition, and then we present the process of eidetic intuition in Ingarden's perspective (indicating Gödel's and Ingarden's common points of view). We also argue that Ingarden's rich ontology could contribute in a significant way to the debates currently taking place in the mainstream philosophy of mathematics.