Filozofia Nauki (*The Philosophy of Science*)
ISSN 1230-6894 e-ISSN 2657-5868
2019, vol. 27(1) [105]: 27-48
DOI: 10.14394/filnau.2019.0002

MATEUSZ KLONOWSKI, KRZYSZTOF KRAWCZYK*

PROBLEM WSZECHWIEDZY LOGICZNEJ
KRYTYKA ŚWIATÓW NIENORMALNYCH I PROPOZYCJA NOWEGO ROZWIĄZANIA**

Abstract

THE PROBLEM OF LOGICAL OMNISCIENCE: AN ALTERNATIVE TO NON-NORMAL WORLDS

In this paper, we bring up the problem of logical omniscience in epistemic logic. One way of avoiding the problem is through Rantala models, where non-normal worlds are introduced. Such models are vulnerable to criticism, as we show. One of many issues that occur is the Bjerring result, which states that incorporating non-normal worlds makes the agent logically incompetent. For this reason, we propose a different solution based on positional logics.

Keywords: epistemic logic, modal logic, positional logic, Rantala models, non-normal possible worlds, Łoś operator, moderately rational agent, problem of logical omniscience

Systemy logiczne ocenia się pod względem poprawności w dwóch aspektach. Po pierwsze, sprawdza się ich poprawność formalną, którą rozumie się jako niesprzeczność systemu, poprawność definicji, dowodów itp. Po drugie, bada się je pod względem poprawności filozoficznej, która zależy od tego, czy dana logika adekwatnie opisuje dziedzinę lub problem, które ma analizować na gruncie formalnym.

* Katedra Logiki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, ul. Moniuszki 16, 87-100 Toruń, e-mail: matklon@doktorant.umk.pl, krawczyk@doktorant.umk.pl.

** Praca stanowi efekt realizacji grantu *Logiki pozycyjne — metateoria i zastosowania* nr 2012/05/E/HS1/03542 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki. Badania przeprowadzone przez Mateusza Klonowskiego, których wyniki zostały przedstawione w tym artykule, zostały sfinansowane przez Narodowe Centrum Nauki w ramach grantu UMO-2015/19/N/HS1/02401.

Pragniemy podziękować Tomaszowi Jarmużkowi oraz anonimowemu recenzentowi za wszystkie uwagi i sugestie, które przyczyniły się do ulepszenia pracy.

Kwestia poprawności filozoficznej systemów logiki, zwłaszcza systemów modalnych, należy do najważniejszych zagadnień filozofii logiki. Prawdopodobnie jako pierwszy w sposób systematyczny podjął ją Edward J. Lemmon (1959), stawiając pytanie, czy istnieje tylko jeden poprawny system logiki modalnej. Lemmon przedstawił swoje pomysły, analizując wybrane systemy logiki modalnej w kontekście różnych interpretacji modalności, na przykład logikę S0.5 jako metalogikę klasycznej logiki zdań, a logikę S5 jako logikę zdań analitycznych. Zdaniem Lemmona logika modalna może być uznana za poprawną, o ile możemy wykazać adekwatność zamierzonej interpretacji operatora modalnego. Na przykład, jeżeli S5 ma być uznana za logikę zdań analitycznych, to musimy wykazać, że formuła $\Box\varphi$ jest prawem S5 wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest schematem zdania analitycznie prawdziwego. Na podobną ideę poprawności zwraca uwagę Marek Lechniak (1988: 79), omawiając w kontekście teorii racjonalnego zachowania logikę epistemiczną Jerzego Łosia.

W tym artykule, uwzględniając pojęcie poprawności zarówno w sensie formalnym, jak i filozoficznym, skupimy się na problemie wszechwiedzy logicznej oraz próbach usunięcia tego problemu za pomocą osłabienia normalnych logik epistemicznych. Wskażemy również nowe rozwiązanie wykraczające poza wąsko rozumianą logikę modalną, wykorzystujące narzędzia logiki pozycyjnej.

1. PROBLEM POPRAWNOŚCI NORMALNYCH LOGIK EPISTEMICZNYCH

Celem pierwszej części artykułu jest przypomnienie semantycznej charakterystyki normalnej logiki epistemicznej (w skrócie NLE), która stanowi szczególny przypadek modalnej logiki epistemicznej (MLE) (por. Meyer 2001), oraz przedstawienie problemu wszechwiedzy logicznej w kontekście NLE. Zacznijmy od określenia języka MLE.

1.1. JĘZYK MODALNEJ LOGIKI EPISTEMICZNEJ

Formuły MLE budujemy z liter zdaniowych: p_1, p_2, p_3, ..., stałych Boole'owskich: $\neg$, $\rightarrow$, operatora wiedzy K i nawiasów:), ([1]. Zbiór liter zdaniowych oznaczamy przez Lz. Aby uprościć notację, w roli liter zdaniowych będziemy używać liter p, q, r, ... i dopiero w razie potrzeby wprowadzimy indeksy.

[1] Podkreślmy, że właściwie operator wiedzy ma postać K_α, gdzie α reprezentuje podmiot epistemiczny. Zwyczajowo jednak w przypadku logik epistemicznych z jednym podmiotem pomija się indeks wskazujący podmiot.

W celu uproszczenia definicji pojęć, którymi będziemy się posługiwać, język MLE ograniczyliśmy do dwóch stałych Boole'owskich.

Definicja 1.1. *Zbiór* $\mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$ *formuł* MLE jest najmniejszym zbiorem X spełniającym następujące warunki:
(a) $\mathrm{Lz} \subseteq \mathrm{X}$,
(b) $\varphi \in \mathrm{X} \Rightarrow K\varphi \in \mathrm{X}$,
(c) $\varphi \in \mathrm{X} \Rightarrow \neg\varphi \in \mathrm{X}$,
(d) $\varphi, \psi \in \mathrm{X} \Rightarrow \varphi \to \psi \in \mathrm{X}$.

Zbiór $\mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$ formuł KLZ (klasycznej logiki zdań) jest najmniejszym zbiorem X spełniającym warunki (a), (c) i (d) podane w definicji 1.1. Stąd oczywiście $\mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}} \subseteq \mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$.

Jeśli nie powoduje to wieloznaczności, będziemy w formułach opuszczać nawiasy zewnętrzne. Ponadto dla dowolnych φ, $\psi \in \mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$ przyjmujemy następujące skróty formuł: $\varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$, $\varphi \vee \psi := \neg\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi := \neg((\varphi \to \psi) \to \neg(\varphi \to \psi))$.

1.2. SEMANTYCZNY OPIS NLE

Przez NLE będziemy rozumieć normalne logiki modalne, które zawierają logikę T[2]. Poszczególne logiki będą rozumiane jako relacja konsekwencji semantycznej wyznaczona względem określonej klasy struktur relacyjnych.

Definicja 1.2. *Strukturą epistemiczną* jest dowolna para uporządkowana $<W, Q>$, w której W jest niepustym zbiorem światów możliwych, a $Q \subseteq W \times W$ jest zwrotną relacją na W.

Niech ZW będzie klasą struktur epistemicznych[3].

Definicja 1.3. *Modelem na strukturze* $\mathrm{S} \in \mathrm{ZW}$ (*modelem epistemicznym*) jest dowolna para uporządkowana $<\mathrm{S}, v>$, w której $v : W \times \mathrm{Lz} \to \{0, 1\}$ jest funkcją wartościowania dla liter zdaniowych w świecie ze zbioru W.

Klasę wszystkich modeli epistemicznych ufundowanych na dowolnej strukturze z klasy $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{ZW}$ oznaczmy jako M(S).

---

[2] Jako NLE zakwalifikujemy również logiki, które stanowią rozszerzenie T, a które mogą być uznawane za logiki przekonań, a nie wiedzy.

[3] Struktury relacyjne ze zwrotną relacją pozwalają wyrazić za pomocą formuły (T) $K\varphi \to \varphi$ własność prawdziwości (niezawodności) wiedzy. Dlatego też struktury te nazwaliśmy epistemicznymi.

Prawdziwość formuły φ w świecie w w modelu $\mathfrak{M} \in$ M(S) (symbolicznie: $\mathfrak{M}, w \models \varphi$) wyznaczają następujące warunki dla dowolnych $\psi, \chi \in$ $\mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$:

$$\mathfrak{M}, w \models \psi \text{ wtw } v(w, \mathrm{B})=1, \text{ o ile } \mathrm{B} \in \mathrm{Lz}$$

$$\mathfrak{M}, w \models \neg\psi \text{ wtw } \mathfrak{M}, w \not\models \psi$$

$$\mathfrak{M}, w \models \psi \rightarrow \chi \text{ wtw } \mathfrak{M}, w \not\models \psi \text{ lub } \mathfrak{M}, w \models \chi$$

$$\mathfrak{M}, w \models K\psi \text{ wtw } \forall_{x \in W} (wQx \Rightarrow \mathfrak{M}, x \models \psi).$$

Intuicyjnie rzecz ujmując, w świecie w (modelu $\mathfrak{M}$) dany podmiot a wie, że φ, wtedy i tylko wtedy, gdy formuła φ jest prawdziwa w każdym świecie (modelu $\mathfrak{M}$), który podmiot a uznaje za możliwy (tzn. który jest dla niego dostępny z w). Dodając nowe własności relacji epistemicznej dostępności Q, otrzymujemy różne pojęcia wiedzy (por. Meyer 2001: 184-186). Wyróżnia się więc klasy modeli jednolitych pod względem własności owej relacji. Prawdziwość w modelu definiujemy standardowo jako prawdziwość w każdym świecie w tym modelu. Z kolei prawdziwość w strukturze epistemicznej to prawdziwość w każdym modelu określonym na tej strukturze, a prawdziwość w klasie struktur epistemicznych to prawdziwość w każdej strukturze należącej do tej klasy. Prawdziwość w klasie struktur utożsamiamy z tautologicznością. Relację konsekwencji semantycznej zachodzącą między zbiorami formuł języka MLE a pojedynczymi formułami tego języka definiujemy w standardowy sposób:

Definicja 1.4. Niech $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$ i S $\subseteq$ ZW będzie niepusta.
$\Sigma \models_{\mathrm{S}} \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} = <W, Q, v> \in \mathrm{M(S)}} \forall_{w \in W} (\forall_{\chi \in \Sigma} \mathfrak{M}, w \models \chi \Rightarrow \mathfrak{M}, w \models \varphi)$.

Łatwo zauważyć, że φ jest tautologią logiki wyznaczonej względem klasy S (symbolicznie: $\models_{\mathrm{S}} \varphi$) wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona prawdziwa w każdym modelu określonym na strukturze z klasy S, czyli:

$$\models_{\mathrm{S}} \varphi \text{ wtw } \forall_{\mathfrak{M} = <W, Q, v> \in \mathrm{M(S)}} \forall_{w \in W} \mathfrak{M}, w \models \varphi.$$

W artykule będziemy odwoływać się do najmniejszej NLE, tzn. do logiki T wyznaczanej przez klasę ZW. Stanowi ona najmniejszą NLE w tym sensie, że zawiera się w każdej NLE[4].

1.3. PROBLEM WSZECHWIEDZY LOGICZNEJ

Pojęcie wszechwiedzy logicznej określimy na podstawie formuł oraz implikacji metajęzykowych, które zgodnie z opisem podanym przez Johna-Julesa

---

[4] Zgodnie z podanym opisem klasyczna logik zdań zawiera się w T, co znaczy, że wszystkie prawa tej logiki oraz ich podstawienia formułami ze zbioru ForMLE są tautologiami T.

Meyera (2001: 191) mają wyrażać jej własności (por. Lechniak 2011: 231-242, Surowik 2013: 75-78). Dla dowolnych φ, $\chi \in$ $\mathrm{For}_{\mathrm{MLE}}$ i dowolnej niepustej $S \subseteq ZW$ wyróżniamy następujące wyrażenia:

(O1) $K(\varphi \to \chi) \to (K\varphi \to K\chi)$

(O2) $(K\varphi \vee K\chi) \to K(\varphi \vee \chi)$

(O3) $K\varphi \to K(\varphi \vee \chi)$

(O4) $\vDash_S \varphi \Rightarrow \vDash_S K\varphi$

(O5) $\vDash_S \varphi \to \chi \Rightarrow \vDash_S K\varphi \to K\chi$

(O6) $\vDash_S \varphi \leftrightarrow \chi \Rightarrow \vDash_S K\varphi \leftrightarrow K\chi$

Formuły (O1)-(O3) są tautologiami dowolnej NLE, a implikacje (O4)-(O6) są spełnione dla dowolnej NLE (Meyer 2001: 186, 191, Świrydowicz 2014: 44-47, 58-60). Formuła (O1) głosi, że jeżeli podmiot wie, że φ implikuje χ, to wie on, że χ, o ile wie, że φ. Innymi słowy (O1) stwierdza, że wiedza podmiotu jest domknięta na regułę *modus ponens*. Formuły (O2) i (O3) z kolei wyrażają domknięcie wiedzy na regułę wprowadzania alternatywy będącej w zakresie operatora wiedzy. Oczywiście formuła (O3) jest konsekwencją (O2).

Implikacja (O4) stwierdza, że podmiot zna każdą tautologię. Zgodnie z implikacją (O5) podmiot zna wszystkie konsekwencje zdania, które również zna. Implikacja (O6) z kolei głosi, że podmiot zna wszystkie zdania równoważne względem danego zdania, które zna (por. Lechniak 2011: 232). Oczywiście, jeżeli spełniona jest implikacja (O5), to spełniona jest również implikacja (O6). Implikacje (O5) i (O6), podobnie jak formuły (O2) i (O3) uznajemy za wtórne własności wszechwiedzy logicznej. Za jej cechy dystynktywne, z formalnego punktu widzenia, będziemy uznawać formułę (O1) wraz z implikacją (O4)[5].

Meyer (2001: 191) wyróżnia również niesprzeczność jako ważną własność wszechwiedzy. Niesprzeczność wydaje się zresztą dobrym kandydatem na własność wiedzy dowolnego rodzaju. Niemniej, w przypadku NLE konsekwencją semantyczną formuły wyrażającej niesprzeczność $\neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi)$ jest formuła $\neg K(\varphi \wedge \neg\varphi)$, która głosi, że podmiot nie zna fałszu logicznego. Skoro pierwsza z nich jest tautologią, to i druga musi być tautologią. Stąd, na mocy (O4), tautologią jest również formuła $K\neg K(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Widzimy więc, że w przypadku NLE niesprzeczność implikuje metawiedzę na temat fałszu logicznego, a to wydaje się zbyt silne w przypadku analizy wiedzy innego rodzaju niż

[5] Zwróćmy uwagę, że logika, w której nie ma (O1) jako tautologii lub która nie spełnia (O4), nadal może zawierać (O3) lub (O2) jako tautologie lub spełniać (O5) lub (O6). Niemniej, skupimy się tu na analizie formuły (O1) i implikacji (O4).

wszechwiedza logiczna. Zauważmy przy tym, że formuła $\neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi)$ jest konsekwencją formuły (T) wyrażającej prawdziwość wiedzy. Zatem w przypadku NLE niezawodność wiedzy pociąga niesprzeczność wiedzy, a stąd również metawiedzę na temat fałszu logicznego.

Przez podmiot posiadający wszechwiedzę logiczną będziemy rozumieć taki podmiot, którego wiedza jest dedukcyjnie domknięta (czyli domknięta na relację konsekwencji logicznej)[6]. W szczególności zna on wszystkie tautologie danej logiki. Ogólnie można stwierdzić, że dowolna NLE pozwala na analizę zdań epistemicznych, tj. zdań kwalifikujących inne zdania jako wiedzę, o ile uwzględniamy perspektywę podmiotu posiadającego wszechwiedzę logiczną. Zatem logiki tworzące klasę NLE nie nadają się do opisu podmiotów, które nie są doskonałymi logikami (nie mają jakiejś specjalnej nieskończonej mocy obliczeniowej i pamięci). Takie podmioty nie mają wszechwiedzy logicznej. Na przykład nie znają wszystkich tautologii KLZ. Jednak na mocy (O4) oraz faktu, że dowolna tautologia KLZ jest tautologią dowolnej NLE, podmiot poznający powinien znać wszystkie klasyczne tautologie.

Podsumowując, można stwierdzić, że NLE stosuje się do analizy zdań epistemicznych, o ile przez wiedzę rozumiemy wiedzę skrajnie racjonalnego podmiotu, tzn. taką, która ma następujące własności:

1. jest niepusta,
2. jest niesprzeczna,
3. jest domknięta na relację konsekwencji logicznej,
4. jest prawdziwa,
5. podmiot takiej wiedzy ma samowiedzę[7].

Własność 1 jest zagwarantowana w opisie formalnym chociażby ze względu na fakt posiadania przez T jakichś tautologii, a te zgodnie z (O4) są przedmiotem wiedzy. Własność 2 również jest zachowana, skoro formuła $\neg(K\varphi \wedge K\neg\varphi)$ jest tautologią T. Własność 3 jest zachowana ze względu na tautologiczność formuły (O1) i zachodzenie metajęzykowej implikacji (O4)[8]. Natomiast własność 4 jest zachowana, ponieważ formuła $K\varphi \rightarrow \varphi$ (formuła T) jest tautologią T.

[6] Taką wszechwiedzę nazywa się czasem wszechwiedzą dedukcyjną. Z kolei przez wszechwiedzę logiczną rozumie się znajomość wszystkich tautologii danej logiki epistemicznej (Lechniak 2011: 231-235).

[7] Podane tu własności przyjmujemy za teorią racjonalnego działania Wojciecha Patryasa, szczegółowo omówioną w (Lechniak 1988).

[8] Zauważmy, że własność 3 pociąga za sobą własność 1. W wypadku analizy wiedzy niedoskonałego podmiotu własność 3 musi być odrzucona, jako że charakteryzuje pojęcie wszechwiedzy logicznej.

Z kolei w wypadku samowiedzy (warunek 5) możemy uwzględnić logiki określone względem struktur, w których zwrotna relacja dostępności jest dodatkowo przechodnia. Taką logiką jest S4. W logice tej tautologią jest formuła $K\varphi \rightarrow KK\varphi$ (formuła 4), która wyraża tak zwaną samowiedzę pozytywną podmiotu. Jeżeli dodatkowo wymagamy, aby podmiot, który czegoś nie wie, wiedział, że tego czegoś nie wie, czyli aby miał tak zwaną samowiedzę negatywną, możemy rozważyć logikę określoną względem struktur ze zwrotną i przechodnią relacją dostępności, która jest dodatkowo euklidesowa (por. Surowik 2013: 72-73)[9]. Otrzymamy w ten sposób logikę S5. W takiej logice tautologią jest formuła $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$ (formuła 5).

2. NIENORMALNE ŚWIATY MOŻLIWE I OSŁABIENIE NLE

W tej części przedstawimy propozycje rozwiązania problemu wszechwiedzy przez odwołanie się do pojęcia nienormalnego świata możliwego. Takie rozwiązanie zostało po raz pierwszy wprowadzone w logice doksastycznej przez Veikko Rantalę (por. Meyer 2001: 192-193). Pokażemy, że logika epistemiczna określona względem klasy takich modeli nie zachowuje własności charakterystycznych dla wszechwiedzy logicznej (O1) i (O4). Z tego też powodu logika określona względem struktur ze światami nienormalnymi wydaje się dobrym kandydatem na logikę epistemiczną podmiotu racjonalnego, który nie jest obdarzony wszechwiedzą logiczną. Zobaczymy jednak, że podmiot, którego punkt widzenia jest przez taką logikę uwzględniony, musi być bardzo mało racjonalny lub w ogóle nieracjonalny. Źródłem problemu jest użycie pojęcia świata nienormalnego w kontekście analizy zdań epistemicznych.

2.1. MODELE ZE ŚWIATAMI NIENORMALNYMI

Pojęcie modelu ze światami nienormalnymi jest prostą modyfikacją pojęcia modelu epistemicznego określonego w definicji 1.3. Najpierw wprowadzamy modyfikację struktury epistemicznej. Zbiór W światów możliwych rozszerzamy o tzw. niemożliwe światy możliwe (*impossible possible worlds*), zwane również światami nienormalnymi, których zbiór oznaczamy przez W^* (por. Meyer 2001: 192-193). Różnica $W \setminus W^*$ stanowi zbiór normalnych światów możliwych. W światach nienormalnych wszystko może mieć miejsce, żadna

[9] Zasada negatywnej introspekcji wydaje się nieintuicyjna przede wszystkim z powodu „luk" w wiedzy faktualnej (np. wywołanych przez to, co jest poza zasięgiem naszego pojmowania lub wyrażania).

logika nie musi w nich obowiązywać. Uzyskaną strukturę nazywamy *strukturą epistemiczną ze światami nienormalnymi*. Klasę takich struktur oznaczmy jako ZW*. Strukturę epistemiczną określoną w definicji 1.3 można potraktować jako szczególny przypadek struktury obecnie analizowanej, tj. jako strukturę z pustym zbiorem światów nienormalnych.

Następnie modyfikujemy funkcję wartościowania v. Wymagamy, aby spełniała następujące warunki: (i) każdej parze $<w, \varphi>$ gdzie $w \in W \setminus W^*$, a $\varphi \in$ Lz, przypisuje ona jedną z wartości logicznych: 0, 1; (ii) każdej parze $<w, \varphi>$ gdzie $w \in W^*$, a $\varphi \in For_{MLE}$, przypisuje ona jedną z wartości logicznych: 0, 1. Zatem uzyskujemy funkcję $v : ((W \setminus W^*) \times Lz) \cup (W^* \times For_{MLE}) \to \{0, 1\}$.

Modelem epistemicznym ze światami nienormalnymi jest model $<W, W^*, R, v>$ uzyskany w opisany wyżej sposób. Warunki prawdziwości formuł w modelu $\mathfrak{M}$ w świecie normalnym określamy tak samo jak w przypadku modelu epistemicznego. W przypadku prawdziwości w świecie nienormalnym w przyjmujemy dla dowolnej $\varphi \in For_{MLE}$ następujący warunek:

$$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \text{ wtw } v(w, \varphi) = 1$$

Zauważmy, że w światach nienormalnych wszystkie formuły traktowane są jak „atomy”, tzn. wartość formuły złożonej w świecie nienormalnym nie zależy od wartości formuł składowych w tym świecie. Relację konsekwencji semantycznej definiujemy podobnie jak w przypadku definicji 1.4, ale względem niepustej $S \subseteq ZW^*$ i z zachowaniem prawdziwości w światach normalnych.

2.2. USUNIĘCIE PROBLEMU WSZECHWIEDZY LOGICZNEJ

Modyfikacja modelu epistemicznego przez wprowadzenie światów nienormalnych oraz przyjęcie, że funkcja wartościowania v w tych światach może zachowywać się całkowicie arbitralnie, pozwala rozwiązać problem wszechwiedzy logicznej, tj. sfalsyfikować (O1) i (O4). Należy w tym celu wybrać taki świat nienormalny, który będzie dostępny podmiotowi i w którym wartości logiczne formuł sprawią, że jego wiedza nie będzie domknięta na relację konsekwencji.

Zilustrujmy to, budując kontrmodel dla formuły (O1). Za φ weźmy literę zdaniową p, a za χ literę zdaniową q. Model $\mathfrak{M} = <W, W^*, Q, v>$ określamy w następujący sposób: $W = \{w, u\}$, $W^* = \{u\}$, $Q = \{<w, u>, <w, w>, <u, u>\}$, a v jest wartościowaniem takim, że: $v(u, p \to q) = v(u, p) = 1$, $v(u, q) = v(u, Kq) = 0$, a dowolnym innym literom w w i formułom w u funkcja v przypisuje wartość 1. Uzyskujemy wówczas: $\mathfrak{M}, w \vDash K(p \to q)$, $\mathfrak{M}, w \vDash Kp$ i $\mathfrak{M}, w \nvDash Kq$.

Zbudujmy również kontrmodel dla implikacji (O4). Za φ weźmy tautologię $p \to p$. Model $\mathfrak{M} = <W, W^*, Q, v>$ określmy w następujący sposób: $W = \{w, u\}$, $W^* = \{u\}$, $Q = \{<w, u>, <w, w>, <u, u>\}$, v jest wartościowaniem takim, że:

$v(u, p \to p) = v(u, K(p \to p)) = 0$, a dowolnym literom w w i dowolnym innym formułom w u funkcja v przypisuje wartość 1. Uzyskujemy wówczas: $\vDash_{ZW^*} p \to p$ i $\nvDash_{ZW^*} K(p \to p)$.

Widzimy zatem, że z formalnego punktu widzenia światy nienormalne faktycznie pozwalają pozbyć się problemu wszechwiedzy logicznej. Mimo to można wobec logiki modalnej ze światami nienormalnymi wysunąć zarzuty, które uniemożliwiają uznanie jej za poprawną logikę wiedzy racjonalnego podmiotu.

2.3. KRYTYKA ZASTOSOWANIA NIENORMALNYCH ŚWIATÓW MOŻLIWYCH

Przedstawimy teraz zarzut Jensa Christiana Bjerringa (2013) wobec stosowania pojęcia świata niemożliwego do analizy pojęcia wiedzy. Przez światy niemożliwe Bjerring rozumie światy, które zawierają jakąś sprzeczność. Jego zdaniem światy niemożliwe pozwalają na modelowanie jedynie bardzo mało racjonalnych podmiotów i nie mogą być użyte do analizy wiedzy podmiotów umiarkowanie racjonalnych. Przedstawione tu ujęcie odnoszące się do pojęcia światów stanowi swego rodzaju uproszczenie stosowanej wyżej semantyki światów możliwych.

Przyjmijmy za Bjerringiem, że światy możliwe (również nienormalne) identyfikujemy z maksymalnymi zbiorami formuł[10]. Przez maksymalny zbiór formuł rozumiemy taki zbiór, że dla dowolnej formuły φ, φ należy do tego zbioru lub $\neg\varphi$ należy do tego zbioru. Przez świat normalny rozumiemy maksymalny i niesprzeczny zbiór formuł. Z kolei przez świat nienormalny rozumiemy maksymalny i sprzeczny zbiór formuł. Dopuszczenie sprzeczności, w przypadku światów nienormalnych, okazuje się poważnym problemem. Przypomnijmy, że zbiór formuł jest niesprzeczny (w sensie semantycznym), gdy jest spełnialny, czyli gdy istnieje klasyczne wartościowanie przypisujące wartość 1 każdej formule z tego zbioru. Zbiór jest sprzeczny (w sensie semantycznym), gdy nie jest niesprzeczny. Bjerring przyjmuje, że „podmiot wie, że φ" jest prawdą wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest prawdą w każdym epistemicznie możliwym (dla tego podmiotu) świecie[11].

Zwróćmy uwagę, że w podanej przez nas definicji struktury epistemicznej (def. 1.2) nie precyzujemy, czym są światy możliwe. Jednakże każdy świat z dowolnego ustalonego modelu moglibyśmy utożsamić z pewnym zbiorem

[10] Podkreślmy, że Bjerring rozważa język zerowego rzędu z dwiema stałymi Boole'owskimi, tj. $\neg$ i $\to$. Posługując się innymi symbolami, używa skrótów formuł zbudowanych jedynie za pomocą $\neg$, $\to$ i nawiasów (por. część 1.1).

[11] Światy epistemicznie możliwe (alternatywy epistemiczne) można intuicyjnie rozumieć jako światy możliwe, które nie są wykluczone przez wiedzę podmiotu.

formuł. Taki zbiór moglibyśmy określić jako najmniejszy zbiór Σ taki, że (i) jeżeli φ jest prawdziwa w danym świecie rozważanego modelu, to jest elementem Σ, (ii) jeżeli φ nie jest prawdą w danym świecie rozważanego modelu, to $\neg\varphi$ jest elementem Σ.

Bjerring skupia się na wiedzy podmiotu umiarkowanie racjonalnego[12] i jego zdolnościach rozumowania w obrębie języka logiki zdaniowej. Jego zdaniem taki podmiot musi mieć zdolność rozpoznawania jawnej sprzeczności (*blatant inconsistency*). Przykładem tego rodzaju sprzeczności, wyrażalnym w języku zerowego rzędu, jest zdanie „Mój rower jest w całości niebieski i zarazem w całości czerwony". Bjerring wskazuje na relatywność pojęcia jawnej sprzeczności. Zależy ona od tego, z jakiego rodzaju podmiotami (*agents*) mamy do czynienia. Co jest jawną sprzecznością dla profesora logiki, nie musi być takie dla studenta pierwszego roku studiów filozoficznych. Podmiot umiarkowanie racjonalny powinien mieć nietrywialne poznawcze i obliczeniowe zdolności umożliwiające mu przeprowadzanie prostych rozumowań logicznych (Bjerring 2013: 2510). Rozumowania logiczne mają polegać na znajomości i umiejętności stosowania reguł inferencji klasycznej logiki zdań w celu zwiększenia posiadanej wiedzy. Zwiększanie wiedzy ma być z kolei utożsamione z eliminacją światów jako epistemicznych alternatyw. Na przykład, dowiadując się, że Canberra jest stolicą Australii, eliminujemy wszystkie światy możliwe, w których Canberra nie jest stolicą Australii (Bjerring 2013: 2508). W związku z tym podmiot umiarkowanie racjonalny musi być w stanie wykluczyć wszystkie światy weryfikujące jawne sprzeczności.

Mając na względzie wspomnianą relatywność pojęcia jawnej sprzeczności, Bjerring przyjmuje, że jawna sprzeczność to taka, która daje się wyprowadzić w jednym kroku inferencyjnym. Rozpatrywana liczba kroków dedukcyjnych ma odpowiadać warunkowi minimalnej racjonalności. Innymi słowy, podmiot, który jest minimalnie racjonalny, musi potrafić wykryć każdą jawną sprzeczność, czyli taką, której wykrycie wymaga tylko jednego zastosowania jakiejś reguły inferencji. Regułami inferencji są obowiązujące w różnych systemach dedukcji naturalnej reguły eliminacji i wprowadzania stałych Boole'owskich. Autor proponuje na przykład reguły wprowadzone w (Bostock 1997: 252) z pewnymi modyfikacjami w przypadku reguły eliminacji koniunkcji i zanegowanej implikacji. Po pierwsze, reguła eliminacji koniunkcji ma pozwalać na przejście od formuły $\varphi \wedge \psi$ do formuł φ, ψ w jednym kroku. Po drugie, reguła eliminacji zanegowanej implikacji ma pozwalać na przejście od formuły

[12] Bjerring posługuje się nazwą *umiarkowanie doskonały podmiot* (*moderately ideal agent*). W artykule stosujemy nazwę *umiarkowanie racjonalny podmiot*, chcąc w ten sposób zaznaczyć, że interesuje nas stopień doskonałości podmiotu w aspekcie zdolności rozumowania, tj. zdolności inferencyjnych.

$\neg(\varphi \to \chi)$ do formuł φ, $\neg\chi$ w jednym kroku. Ponadto Bjerring zakłada, że w dowolnym zbiorze, którego pewien podzbiór ma postać $\{\varphi, \neg\varphi\}$, podmiot wykrywa sprzeczność natychmiast, tzn. w zerowej liczbie kroków. W celu wykrycia sprzeczności przeprowadzamy dedukcję, wychodząc od danego zbioru formuł i dołączając do niego formułę lub formuły, stosując jeden raz jedną z przyjętych reguł inferencji. W ten sposób dochodzimy do definicji jawnie sprzecznego zdania/zbioru zdań (Bjerring 2013: 2512):

> Formuła φ (zbiór formuł Σ) jest *jawnie sprzeczna* wtw sprzeczność postaci $\{\chi, \neg\chi\}$ może zostać wyprowadzona z φ (z Σ) za sprawą co najwyżej jednego użycia jednej z reguł inferencji.
>
> Formuła φ (zbiór Σ) jest *subtelnie sprzeczna* wtw jest sprzeczna i nie jest jawnie sprzeczna.

Rozumiejąc niesprzeczność jako spełnialność, Bjerring dowodzi (2013: 2514), że niepusty zbiór niesprzeczny dla dowolnych formuł φ, χ spełnia następujące warunki:

(i) $\varphi \in \Gamma$ wtw $\neg\varphi \notin \Gamma$,

(ii) $\varphi \to \chi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\chi \in \Gamma$.

Na tej podstawie można stwierdzić, że sprzeczny zbiór formuł nie spełnia (i) lub (ii). Jeśli nie spełnia (i) i jest przy tym maksymalny, to zawiera sprzeczny zbiór o postaci $\{\varphi, \neg\varphi\}$. Jeśli nie spełnia (ii) i jest maksymalny, to zawiera jeden z następujących sprzecznych zbiorów: $\{\varphi, \varphi \to \chi, \neg\chi\}$ lub $\{\neg\varphi, \neg(\varphi \to \chi), \neg\chi\}$, lub $\{\neg\varphi, \neg(\varphi \to \chi), \chi\}$, lub $\{\varphi, \neg(\varphi \to \chi), \chi\}$. W pierwszym przypadku mamy do czynienia ze zbiorem jawnie sprzecznym w oczywisty sposób. W drugim — również ze zbiorami jawnie sprzecznymi, wystarczy bowiem jedno zastosowanie odpowiedniej reguły inferencji, aby otrzymać sprzeczność $\{\varphi, \neg\varphi\}$. W przypadku zbioru pierwszego stosujemy regułę *modus ponens*, w przypadku pozostałych zbiorów regułę eliminacji zanegowanej implikacji. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że każdy maksymalny sprzeczny zbiór jest jawnie sprzeczny (Bjerring 2013: 2520-2522).

Przyjmijmy, że chcemy rozwiązać problem wszechwiedzy logicznej i w tym celu załóżmy, że co najmniej jeden świat nienormalny będzie stanowić świat epistemicznie możliwy. Podobnie jak w przypadku kontrmodeli, które podaliśmy w części 2.2, światy te muszą być sprzeczne. Łatwo sprawdzić, że obydwa podane przez nas światy, przy założeniu, że światy te utożsamimy z odpowiednimi maksymalnymi zbiorami formuł, pozwalają uzyskać jawną sprzeczność. W pierwszym przypadku wystarczy zastosować regułę *modus ponens*, w drugim regułę eliminacji zanegowanej implikacji. Jeżeli jednak chcemy zapewnić naszemu podmiotowi minimalną racjonalność w sensie Bjerringa, to musimy przyjąć, że żaden z epistemicznie możliwych światów nie jest jawnie sprzeczny. Możemy zatem spróbować podać takie kontrmodele, w których światy nienormalne będą zawierać sprzeczne formuły, ale nie da się wydobyć jawnej sprzeczności przez jedno tylko zastosowanie reguły inferencji. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ zgodnie z analizą Bjerringa, o ile będą to zbiory sprzeczne, to będą również jawnie sprzeczne. Tymczasem muszą być to zbiory sprzeczne, jeżeli chcemy sfalsyfikować (O1) lub (O4). Widzimy zatem, że w przypadku modeli zawierających światy nienormalne nie da się pogodzić braku wszechwiedzy logicznej z Bjerringowską minimalną racjonalnością podmiotu. Podmiot, który nie ma absolutnej wiedzy logicznej, okazuje się zatem bardzo mało racjonalny.

Podsumowując, na mocy rozważań Bjerringa mamy dwie możliwości: (1) albo problem wszechwiedzy logicznej pozostanie nierozwiązany, a przyjęta logika modalna będzie odnosić się jedynie do wiedzy podmiotów o nieograniczonych zdolnościach logicznych, (2) albo rozwiążemy problem wszechwiedzy, lecz wówczas nasza logika będzie odpowiednia tylko dla wiedzy podmiotów, które nie mają nawet prostych umiejętności dedukcyjnych. Przypomnijmy, że takie umiejętności rozumiane są jako zdolność eliminacji światów niemożliwych zawierających jawne sprzeczności. Według Bjerringa zdolności tej nie da się zrealizować w wypadku wcześniej zarysowanych modeli zawierających światy nienormalne.

Żadna z tych możliwości nie jest więc satysfakcjonująca. Można, rzecz jasna, przekonywać, że skoro mamy wybierać między modelem wiedzy podmiotu posiadającego wszechwiedzę logiczną a modelem wiedzy bardzo mało racjonalnego lub w ogóle nieracjonalnego podmiotu, to wybierzmy pierwszy model ze względu na jego zalety formalne. Sama konstrukcja takiego modelu jest bardzo prosta. Klasy takich modeli generują logiki, które zachowują prawa klasyczne i pozwalają wyrażać różne logiczne zależności związane z pojęciem wiedzy. Nie o to jednak chodzi, abyśmy wybrali mniejsze zło i zakończyli analizę problemu wszechwiedzy logicznej, stwierdzając, że z dwojga złego lepszy jest logicznie wszechwiedzący podmiot niż bardzo mało racjonalny podmiot. Rozważając zdania epistemiczne, powinniśmy mieć możliwość uwzględnienia czegoś pomiędzy wskazanymi skrajnościami, tzn. uwzględnienia perspektywy podmiotu umiarkowanie racjonalnego.

Można jednak wątpić, czy umiejętność wykrywania jawnych sprzeczności powinna być dostępna umiarkowanie racjonalnym podmiotom. Pod tym względem wobec koncepcji Bjerringa można wysunąć co najmniej dwa zarzuty. Po pierwsze, na krytykę podatny jest wymóg maksymalności światów. Zauważmy, że zgodnie z definicją maksymalności, którą proponuje autor, wszystkie światy normalne spełniają warunek maksymalności, gdyż funkcja wartościowania jest rozumiana klasycznie. Inaczej sprawy się mają ze światami nienormalnymi. Otóż wystarczy wziąć pod uwagę model, w którym występuje przynajmniej jeden taki świat nienormalny w, że ani formuła φ, ani formuła $\neg\varphi$ nie jest w nim prawdziwa. Widać, że takie światy nie będą spełniać warunku maksymalności w sensie Bjerringa. W związku z tym otrzymany wynik nie dotyczy dowolnego modelu ze światami nienormalnymi. Można więc pytać: skąd decyzja o pominięciu modeli, w których nie wszystkie światy spełniają warunek maksymalności? Czy dla dowolnego zdania podmiot umiarkowanie racjonalny musi być przekonany o tym zdaniu lub o jego negacji?

Po drugie, zauważmy, że nawet gdy rozpatrujemy wykrywalną natychmiast (czyli bez potrzeby wykorzystywania reguł inferencji) sprzeczność $\{\varphi, \neg\varphi\}$, to do przejrzenia i tak mamy przeliczalnie nieskończenie wiele formuł. W związku z tym możliwa jest sytuacja, w której podmiot po rozpoznaniu φ musi rozpatrzyć ogromną liczbę innych formuł (np. miliard), zanim dojdzie do formuły $\neg\varphi$. Ponadto, podmiot mógłby natrafić na formuły o bardzo dużej złożoności, potencjalnie nawet zbudowane za pomocą miliona lub miliarda spójników. Zwróćmy również uwagę, że jeżeli dany zbiór będzie jawnie sprzeczny, to podmiot w końcu, o ile wystarczy mu życia, ma szansę wyprowadzić tę sprzeczność. Ale gdy zbiór nie będzie jawnie sprzeczny, analiza nigdy nie dobiegnie końca, ponieważ podmiot nie może mieć pewności, że żadna z formuł, które ma jeszcze do przejrzenia, nie pozwoli w co najwyżej jednym kroku wyprowadzić sprzeczności.

Ze względu na wskazane problemy spróbujemy zarysować inną koncepcję podmiotu umiarkowanie racjonalnego. Wykorzystując pewne intuicje, określimy odpowiednią logikę epistemiczną, porzucimy przy tym jednak język logiki modalnej na rzecz języka logiki pozycyjnej.

3. PODMIOT UMIARKOWANIE RACJONALNY

Umiarkowanie racjonalny lub niedoskonały pod względem zdolności poznawczych podmiot P1 jest czymś pośrednim między podmiotem skrajnie racjonalnym P2 a podmiotem bardzo mało racjonalnym P0. Podmiot P1 może się mylić, lecz większość jego rozumowań jest poprawna. To odróżnia go od P2 (który jest bezbłędny i dysponuje wszechwiedzą logiczną) i P0 (którego większość rozumowań jest obarczona błędem i który może przeoczyć nawet oczywiste błędy logiczne).

P2 dysponuje wszechwiedzą logiczną. W jego przypadku wiedza rozumiana jest jako prawdziwe przekonania domknięte na relację konsekwencji logicznej (por. część 1.3). P2 musi również mieć samowiedzę pozytywną i negatywną (por. część 1.3). Taki podmiot nie musi wiedzieć wszystkiego, lecz przyjmiemy, że wszystkie jego przekonania zasługują na miano wiedzy. Innymi słowy P2 nie może się mylić, lecz w pewnych przypadkach może nie znać odpowiedzi na zadane pytanie.

P0 z kolei nie tylko nie ma wszechwiedzy logicznej, lecz także może uznawać fałsze logiczne (kontrtautologie) za prawdę. Jego wiedza również musi być prawdziwa i niesprzeczna, lecz nie musi być domknięta na relację konsekwencji logicznej. P0 nie dysponuje ani pozytywną, ani negatywną samowiedzą.

Wiedza P1 jest pod pewnym względem podobna do wiedzy P2, a pod innym do wiedzy P0. P2 stanowi dla P1 autorytet epistemiczny, a P0 stanowi dolną granicę tego, co P1 musi uznawać za prawdziwe, zgodnie z zasadą: jeżeli bardzo mało racjonalny podmiot dostrzegł jakąś prawdę, to i umiarkowanie racjonalny podmiot musi ją dostrzec. P1 nie ma oczywiście wszechwiedzy logicznej. Nie musi znać wszystkich tautologii ani też jego przekonania nie muszą być domknięte na relację konsekwencji logicznej. Być może jednak powinna być domknięta na *modus ponens* (por. część 1.3). Niewątpliwie jednak wiedza P1 musi spełniać co najmniej warunek prawdziwości, co powinno implikować niesprzeczność. Podmiot taki powinien również mieć pozytywną samowiedzę i nie mieć negatywnej samowiedzy (por. część 1.3). Moglibyśmy uwzględnić również warianty, zgodnie z którymi wiedza P1 jest domknięta na spójnik koniunkcji, alternatywy i/lub równoważności, jak również inne podobne własności. Za minimalne własności wiedzy P1 uznamy zatem brak wszechwiedzy logicznej, prawdziwość (a zatem i niesprzeczność) oraz posiadanie samowiedzy pozytywnej.

Zgodnie z interpretacją epistemiczną światy możliwe stanowią reprezentacje przekonań podmiotów. W przypadku światów normalnych mamy do czynienia z przekonaniami, które muszą być logicznie poprawne, w przypadku światów niemożliwych przekonania mogą być niezgodne z prawami logiki. Pojawia się pytanie, czy zbiorem alternatyw epistemicznych P1 może być suma światów normalnych i nienormalnych, a zatem czy suma tych światów może stanowić obraz przekonań P1. Jeżeli tak, to trzeba uznać, że taki podmiot ma dostęp do wszystkich praw logiki i rozumie, jak je stosować, ale równocześnie nie zna żadnych praw lub przynajmniej z jakichś powodów ich nie stosuje, a jego przekonania to wynik snucia domysłów. To pokazuje, że potrzebujemy jakiegoś trzeciego rodzaju światów możliwych, które w pewnej mierze byłyby normalne, a w pewnej mierze nienormalne.

Spróbujemy jednak spojrzeć na problem wiedzy P1 nieco inaczej. Zamiast sprawdzać dostępne mu alternatywy epistemiczne, czymkolwiek miałyby być, możemy analizować przekonania P2 i P0. Jeżeli coś okaże się prawdą z punktu widzenia P2 i P0, to uznamy, że jest prawdziwym przekonaniem P1. Pomysł ten opiera się na założeniu, że skoro coś jest prawdą dla P2, to musi być prawdą, a jeżeli dodatkowo podmiot bez większych kompetencji poznawczych P0 był w stanie to dostrzec, to tym bardziej dostrzeże to podmiot P1, którego kompetencje poznawcze są wyższe. Chcemy przez to stwierdzić, że wiedza P1 to te spośród przekonań P0, które są również przekonaniami P2. Podmiot P0 jest gwarantem dostępności danych przekonań dla P1, a podmiot P2 jest gwarantem poprawności i prawdziwości tych przekonań. Możemy zatem zauważyć, że stany wiedzy P1 i P0 są tożsame. Różnica polega na tym, że P0 może uznawać za prawdziwe zdania, których P1 nie może zaakceptować. Na przykład, P0 może przyjąć zdanie o postaci $\neg(p \to p)$, natomiast P1 nie może tego zrobić, ponieważ nie zrobi tego P2. Ponadto P1 nie musi wcale akceptować zdania o postaci $p \to p$, ponieważ takie zdania mogą być niedostępne podmiotowi P0. Zauważmy, że gdy P2 lub P0 odrzucają jakieś przekonanie, to P1 może mieć wątpliwości, czy je przyjąć. Dla uproszczenia uznamy jednak, że odrzuci on takie przekonanie, co nie znaczy, że zaakceptuje negację tego zdania. Tak naprawdę takie przekonanie nie będzie dla niego ani prawdziwe, ani fałszywe, musi mieć trzecią wartość logiczną.

Zwróćmy uwagę, że posługując się semantyką światów możliwych, mamy szansę analizować zarówno światy normalne, jak i światy nienormalne. A zatem możemy analizować zarówno przekonania P2, jak i P0. Czy mamy zatem możliwość uwzględnienia perspektywy P1? Trzeba jednak zapytać, z punktu widzenia jakiego świata analizujemy takie przekonania, a zatem kto przygląda się innym światom. Jeżeli wychodzimy od świata normalnego, to mamy do czynienia z punktem widzenia P2. Jeżeli wychodzimy od świata nienormalnego, to mamy do czynienia z perspektywą P0. Sądzimy, że logika modalna nie jest odpowiednia do analizy wiedzy podmiotu umiarkowanie racjonalnego w zarysowanym sensie. Naszym zdaniem bardziej obiecująca w tym względzie jest logika pozycyjna. Opis logiki epistemicznej w kategoriach logiki pozycyjnej przedstawimy w następnej części.

4. INNA PRÓBA ROZWIĄZANIA PROBLEMU WSZECHWIEDZY LOGICZNEJ

Modalna logika epistemiczna nie jest jedyną logiką podającą formalny opis wiedzy. Rodzimym przykładem logiki epistemicznej, która nie korzysta z semantyki światów możliwych, jest logika L Jerzego Łosia, która była *de facto* pierwszą logiką epistemiczną na świecie (por. Łoś 1948, Lechniak 1988).

Ostatnimi czasy idee polskiego logika są szczegółowo rozwijane i wypracowane wyniki mogłyby posłużyć do zadowalającego rozwiązania problemu wszechwiedzy logicznej. W artykule Tomasza Jarmużka i Andrzeja Pietruszczaka (2004) wyodrębniono z logiki Łosia jej minimalny fragment i przedstawiono semantykę, która nie jest semantyką światów możliwych[13]. W monografii *Normalne logiki pozycyjne* (Jarmużek, Tkaczyk 2015) zaproponowano całą rodzinę logik opartych na tym minimalnym fragmencie, nazywając je normalnymi logikami pozycyjnymi. W takich logikach tautologiami są odpowiedniki formuły (O1) i implikacji (O4) (zob. część 1.3). Nie przekreśla to jednak jeszcze możliwości wykorzystania logik pozycyjnych do opracowania interesującej tu nas logiki wiedzy, ponieważ dzięki wyodrębnieniu normalnych logik pozycyjnych można zacząć badać systemy od nich słabsze (a więc także słabsze od logiki Łosia), i właśnie w takich systemach można upatrywać nadziei na usunięcie problemu wszechwiedzy przy jednoczesnym zachowaniu filozoficznej poprawności semantyki. W tym kierunku na przykład, chociaż bez interpretacji epistemicznej, zmierzają np. prace Marcina Tkaczyka (2009, 2013).

Operator Łosia R, nazywany również operatorem realizacji, stanowi funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów, zdaniowego i nazwowego. Wyrażenie $R_\alpha \varphi$ można ogólnie rozumieć jako: φ realizuje się w pozycji α. Operator R stosowany jest głównie w analizie problemów związanych z czasem, gdzie realizacja w pozycji α jest rozumiana jako zajście określonego stanu rzeczy wyrażonego przez φ w czasie czy też momencie α. W sposób temporalny operator R interpretował już Łoś (1947). W jego ślady poszedł Nicholas Rescher (1968) oraz współcześnie Tkaczyk (2009) i Jarmużek (2013). Jarmużek (2007) oraz Jarmużek i Tkaczyk (2015) wskazują również na inne możliwości rozumienia i zastosowania operatora Łosia, np. na interpretacje:

arytmetyczną: $R_\alpha (x = 7 - 4)$ — α jest rozwiązaniem równania $x = 7 - 4$,

przestrzenną: R_α Sokrates śpi — Sokrates śpi realizuje się w miejscu α,

doksastyczną: R_α Koty to mądre zwierzęta — podmiot α jest przekonany, że koty to mądre zwierzęta[14].

Naszkicujemy teraz strategię nadania modelom logiki pozycyjnej interpretacji epistemicznej przy jednoczesnej próbie uniknięcia wszechwiedzy lo-

[13] Bodaj najnowszą publikacją dotycząca minimalnego fragmentu logiki Łosia jest praca Anny Marii Karczewskiej (2017), traktująca o maksymalności ze względu na pojedynczy indeks (*single-index maximality*).

[14] Interpretacja ta była analizowana już przez Łosia (1948).

gicznej[15]. Zaczniemy od logiki MR, po raz pierwszy opisanej w (Jarmużek, Pietruszczak 2004). Potraktujemy MR jako bazę, na podstawie której przeprowadzimy dalsze rozważania.

Formuły Minimalnej Logiki Pozycyjnej MR budujemy z liter zdaniowych, stałych Boole'owskich $\neg$, $\rightarrow$, operatora Łosia R, stałych indywiduowych $\{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots\}$ i nawiasów), (. Zbiór stałych indywiduowych oznaczmy przez Si.

> Definicja 4.1. *Zbiór* $\mathrm{For}_{\mathrm{MR}}$ *formuł* MR jest najmniejszym zbiorem Σ spełniającym warunki (c) i (d) podane w definicji 1.1 oraz warunek:
>
> jeśli $\varphi \in \mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$, to $R_\alpha\, \varphi \in \Sigma$, gdzie $\alpha \in$ Si.

Zauważmy, że język logiki MR nie dopuszcza iteracji operatora R. Ponadto wszystkie klasyczne formuły, tj. elementy $\mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$ występują jedynie w zasięgu operatora R. Zatem żadna z formuł KLZ nie jest formułą MR.

> Definicja 4.2. *Modelem* MR jest trójka uporządkowana M = $<W, f, V>$ taka, że:
>
> W jest niepustym zbiorem pozycji,
>
> f : Si $\rightarrow W$ jest funkcją denotacji przypisującą nazwy elementom dziedziny,
>
> V : $W \times \mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}} \rightarrow \{0, 1\}$ jest klasycznym wartościowaniem formuł zrelatywizowanym do elementów z W, tj. spełniającym następujące warunki dla dowolnej pozycji $w \in W$ i dowolnych formuł $\varphi, \psi \in \mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$:
>
> $V(w, \neg\varphi) = 1$ wtw $V(w, \varphi) = 0$,
>
> $V(w, \varphi \rightarrow \psi) = 1$ wtw $V(w, \varphi) = 0$ lub $V(w, \chi) = 1$.

Klasę modeli MR oznaczmy przez M_{MR}. Pojęcie prawdziwości formuły φ w modelu $\mathfrak{M} \in \mathrm{M}_{\mathrm{MR}}$ wyznaczamy za pomocą następujących warunków dla dowolnych $\chi, \psi \in \mathrm{For}_{\mathrm{MR}}$ i $\alpha \in$ Si:

$\mathfrak{M} \vDash R_\alpha \chi$ wtw $V(f(\alpha),\chi) = 1$

$\mathfrak{M} \vDash \neg\chi$ wtw $\mathfrak{M} \nvDash \chi$

$\mathfrak{M} \vDash \chi \rightarrow \psi$ wtw $\mathfrak{M} \nvDash \chi$ lub $\mathfrak{M} \vDash \psi$.

---

[15] Pierwsza próba epistemicznej interpretacji logiki pozycyjnej została przedstawiona przez Tomasza Jarmużka i Krzysztofa Krawczyka podczas konferencji „Applications of Algebra", która odbyła się w dniach 5-11 marca 2018 roku w Zakopanem.

Logika MR jest logiką określoną względem klasy M_{MR}. Relację $\vDash_{M_{MR}} \subseteq P(For_{MR}) \times For_{MR}$ definiujemy w następujący sposób:

Definicja 4.3. Niech $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq For_{MR}$.
$\Sigma \vDash_{M_{MR}} \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in M_{MR}} (\forall_{\chi \in \Sigma}\, \mathfrak{M} \vDash \chi \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi)$.

W tym miejscu warto dookreślić pojęcie normalnej logiki pozycyjnej. W skrócie są to takie systemy, w których stałe Boole'owskie zachowują się w standardowy sposób zgodnie z ich klasyczną interpretacją. Innymi słowy, przez normalne logiki pozycyjne rozumie się logiki nadbudowane nad logiką MR.

Jak już wcześniej zaznaczyliśmy, zależy nam na tym, aby nadać logice pozycyjnej interpretację epistemiczną. Przyjmijmy zatem, że R będzie operatorem wiedzy. Wyrażenia postaci $R_\alpha\, \varphi$ mają znaczyć: podmiot α wie, że φ. Zbiór W utożsamiamy ze zbiorem poznających podmiotów, a Si ze zbiorem ich nazw. Rzecz jasna, przyjęcie takiej konwencji to za mało, aby uznać, że logika pozycyjna nadaje się do modelowania postaw epistemicznych. Za podstawowe własności wiedzy, które pozwalają scharakteryzować operator wiedzy przyjmujemy: (i) rozłączność z wszechwiedzą logiczną (chcemy modelować postawy epistemiczne podmiotów, które pod względem możliwości poznawczych są zbliżone do ludzi), (ii) niezawodność, która znajduje wyraz w formule $R_\alpha\, \varphi \to \varphi$, (iii) możliwość iteracji i introspekcyjna pozytywna dostępność, za którą odpowiada formuła $R_\alpha\, \varphi \to R_\alpha R_\alpha\, \varphi$.

Chcąc nadać logice MR interpretację epistemiczną, wprowadzamy Minimalną Pozycyjną Logikę Epistemiczną MRE. W tym celu modyfikujemy pojęcie formuły i modelu MR:

Definicja 4.4. *Zbiór* For_{MRE} *formuł* MRE jest najmniejszym zbiorem Σ spełniającym warunki (a), (c) i (d) definicji 1.1 oraz następujący warunek:

jeśli $\varphi \in For_{KLZ}$, to $R_\alpha\, \varphi \in \Sigma$, gdzie $\alpha \in$ Si.

Zgodnie z definicją 4.4 zbiór For_{MRE} zawiera każdą poprawnie zbudowaną formułę klasyczną. Nadal jednak nie dopuszcza się iteracji operatora R, ale zezwala się na łączenie formuł postaci $R_\alpha\, \varphi$ z formułami klasycznymi. Formułą rozważanego języka jest więc na przykład wyrażenie $R_\alpha\, \varphi \to \varphi$, gdzie $\varphi \in For_{KLZ}$.

Definicja 4.5. *Modelem* MRE jest trójka uporządkowana $\mathfrak{M} = \langle W, f, \mathbb{V} \rangle$ taka, że:

W, f są takie jak w modelu MR,

$\mathbb{V} : Lz \cup (W \times For_{KLZ}) \to \{0, 1\}$ jest arbitralnym wartościowaniem.

Klasę modeli MRE oznaczmy jako $\mathrm{M}_{\mathrm{MRE}}$. Warunki prawdziwości dowolnej formuły φ w modelu MRE określamy podobnie jak wcześniej w modelu MR. Modyfikacja dotyczy formuł zbudowanych za pomocą operatora realizacji i liter zdaniowych:

$$\mathfrak{M} \vDash R_\alpha \chi \text{ wtw } \mathbb{V}(f(\alpha),\chi) = 1$$

$$\mathfrak{M} \vDash \chi \text{ wtw } \mathbb{V}(\chi) = 1, \text{ o ile } \chi \in \mathrm{Lz}$$

Relację $\vDash_{\mathrm{M}_{\mathrm{MRE}}} P(\mathrm{For}_{\mathrm{MRE}}) \times \mathrm{For}_{\mathrm{MRE}}$ określamy względem $\mathrm{M}_{\mathrm{MRE}}$, podobnie jak relację $\vDash_{\mathrm{M}_{\mathrm{MR}}}$. Przez tautologię rozumiemy dowolną formułę, która jest konsekwencją semantyczną pustego zbioru formuł.

Zauważmy, że funkcja $\mathbb{V}$ działa na $W \times \mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$ podobnie jak wartościowanie z modelu ze światami nienormalnymi, czyli przypisuje wartości 0 lub 1 w całkowicie dowolny sposób. Tym samym możemy rozpatrywać zarówno modele, w których funkcja ta działa zgodnie z logiką klasyczną, jak i takie, w których działa z nią niezgodnie. W ten sposób zapewniamy dostęp do rozpoznań podmiotów skrajnie racjonalnych, które są wszechwiedzące logicznie, jak i bardzo mało racjonalnych, które potrafią jakoś rozumować, ale zwykle popełniają błędy. Ponadto $\mathbb{V}$ wartościuje litery zdaniowe bez relatywizacji do zbioru podmiotów. Rozszerzamy wartościowanie w ten sposób, ponieważ chcemy, aby model dostarczał nam informacji na temat tego, jak się rzeczy mają w rzeczywistości, a nie tylko jaki stosunek poznawczy przyjmują podmioty. Model pozwala zatem na weryfikację przekonań podmiotów: nie jest wykluczona sytuacja, w której podmiot α ma błędne przekonanie, że φ (tzn. jest przekonany, że φ, lecz φ nie zachodzi). Taka sytuacja jest oczywiście wykluczona w przypadku wiedzy, co uwzględniamy niżej.

Logika MRE jest logiką bardzo słabą. Jej prawami będą jedynie podstawienia logiki klasycznej[16]. Dalszą analizę umożliwi określenie warunków odpowiednio ograniczających klasę modeli i rozszerzenie w ten sposób logiki MRE. Dla przykładu, jeżeli chcemy, aby odpowiednik formuły (T), czyli formuła $R_\alpha \varphi \rightarrow \varphi$, był tautologią, to musimy rozważyć modele MRE, które spełniają następujący warunek: dla dowolnej $\varphi \in \mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}}$ i dowolnej $\alpha \in \mathrm{Si}$: $\mathbb{V}(f(\alpha),\varphi) = 1 \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi$. Dowód podajemy niżej dla wersji uogólnionej.

[16] Rzecz jasna, logika MRE jest za słaba, aby można było uznać ją za logikę epistemiczną. Z tego powodu moglibyśmy przesunąć dolną granicę epistemicznej logiki pozycyjnej do odpowiedniego rozszerzenia logiki MRE. Jednakże, jeśli nie dopuścimy iteracji operatora R, to nadal będziemy mieli problem ze spełnieniem warunku (iii). Odpowiednie rozszerzenie, w którym dopuszcza się iteracje i dla którego spełnione będą wszystkie trzy warunki (i)-(iii), określamy niżej.

W celu wykazania, że w logice MRE nie zachodzi problem wszechwiedzy logicznej przedstawimy kontrmodele dla odpowiedników (O1) i (O4). Rozważymy następujące formuły dla dowolnych $\varphi, \chi \in \mathrm{For}_{\mathrm{MRE}}$:

$$R_\alpha (\varphi \to \chi) \to (R_\alpha \varphi \to R_\alpha \chi) \qquad (1')$$

$$\vDash_{\mathrm{M_{MRE}}} \varphi \Rightarrow \vDash_{\mathrm{M_{MRE}}} R_\alpha \varphi \qquad (4')$$

W celu sfalsyfikowania (1') rozpatrzmy model $\mathfrak{M} = <W, f, \mathbb{V}>$ taki, że: $W = \{w\}$, dla każdej $\alpha \in$ Si: $f(\alpha) = w$, $\mathbb{V}$ jest wartościowaniem takim, że: $\mathbb{V}(w, p) = 1$, $\mathbb{V}(w, p \to q) = 1$, $\mathbb{V}(w, q) = 0$, a dowolnym innym formułom dla podmiotu w funkcja $\mathbb{V}$ przypisuje wartość 1. Uzyskujemy dla dowolnej $\alpha \in$ Si: $\mathfrak{M} \vDash R_\alpha (p \to q)$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash R_\alpha p \to R_\alpha q$.

W celu sfalsyfikowania (4') rozważmy model $\mathfrak{M} = <W, f, \mathbb{V}>$ taki, że: $W = \{w\}$, dla każdej $\alpha \in$ Si: $f(\alpha) = w$ i $\mathbb{V}$ jest wartościowaniem takim, że: $\mathbb{V}(p \vee \neg p) = 1$, $\mathbb{V}(w, p \vee \neg p) = 0$, a dowolnym innym formułom dla podmiotu w $\mathbb{V}$ przypisuje wartość 1. Uzyskujemy dla dowolnej $\alpha \in$ Si: $\mathfrak{M} \vDash (p \vee \neg p)$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash R_\alpha (p \vee \neg p)$.

Za pozycyjną logikę epistemiczną (w skrócie PLE) uznamy taką logikę pozycyjną, w której dopuszczamy iteracje operatora R.

Definicja 4.6. *Zbiór* $\mathrm{For}_{\mathrm{PLE}}$ *formuł* PLE jest najmniejszym zbiorem Σ spełniającym warunki (a), (c) i (d) definicji 1.1 oraz następujący warunek:

jeśli $\varphi \in \Sigma$, to $R_\alpha \varphi \in \Sigma$, gdzie $\alpha \in$ Si.

Oczywiście $\mathrm{For}_{\mathrm{KLZ}} \cup \mathrm{For}_{\mathrm{MR}} \subseteq \mathrm{For}_{\mathrm{MRE}} \subseteq \mathrm{For}_{\mathrm{PLE}}$.

Definicja 4.7. Modelem PLE jest trójka uporządkowana $\mathfrak{M} = <W, f, \mathbb{V}>$ taka, że:

W, f są takie jak w modelu MR,

$\mathbb{V} : \mathrm{Lz} \cup (\mathbb{W} \times \mathrm{For}_{\mathrm{PLE}}) \to \{0, 1\}$ jest arbitralnym wartościowaniem, przy czym: $\mathbb{W} := \{x \mid \exists_{n \in \mathbb{N}} (x \in W_1 \times \ldots \times W_n \text{ i } \forall_{i \leq n} W_i = W)\}$.

Zbiór $\mathbb{W}$ to zbiór n-tek uporządkowanych o elementach ze zbioru W, które możemy utożsamić z ciągami o elementach ze zbioru W. Klasę modeli PLE oznaczmy jako $\mathrm{M_{PLE}}$. Warunki prawdziwości dowolnej formuły φ w modelu PLE określamy podobnie jak w przypadku modelu MR. Modyfikacja dotyczy tylko formuł zbudowanych za pomocą operatora realizacji i liter zdaniowych:

$$\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_1} \ldots R_{\alpha_n} \chi \text{ wtw } \mathbb{V}(<f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)>, \chi) = 1$$

$$\mathfrak{M} \vDash \chi \text{ wtw } \mathbb{V}(\chi) = 1, \text{ o ile } \chi \in \mathrm{Lz}.$$

Widzimy, że zagnieżdżenie operatora R odpowiada długości rozważanego ciągu: sprawdzając prawdziwość formuły z n iteracjami R, odnosimy się do wartościowania formuły względem n-elementowego ciągu.

Niech $M'_{PLE} \subseteq M_{PLE}$ będzie niepusta. Relację $\vDash_{M'_{PLE}} \subseteq P(For_{PLE}) \times For_{PLE}$ definiujemy podobnie jak relację $\vDash_{M_{MR}}$ i $\vDash_{M_{MRE}}$, uwzględniając klasę M'_{PLE}. Zauważmy, że MRE będzie podlogiką dowolnej logiki będącej PLE.

Na gruncie odpowiedniej PLE, podobnie jak w przypadku określonego rozszerzenia MRE, możemy jako tautologię uzyskać odpowiednik formuły (T), a co więcej, wolno nam analizować prawa logiki epistemicznej, które powinny zawierać iteracje operatora epistemicznego, np. odpowiednik formuły (4). Niech $M^{\mathbf{t}}_{PLE}$ będzie klasą modeli, dla których spełniony jest następujący warunek: dla dowolnej $\varphi \in For_{PLE}$, dowolnej $n \in \mathbb{N}$ i dowolnej $\alpha_i \in Si$, gdzie $i \leq n$:

$$\mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)>, \varphi) = 1 \Rightarrow [... \Rightarrow [\mathbb{V}(<f(\alpha_n)>, \varphi) = 1 \Rightarrow \mathfrak{M} \vDash \varphi] ...] \qquad (\mathbf{t})$$

W logice wyznaczonej przez klasę $M^{\mathbf{t}}_{PLE}$ nie tylko odpowiednik formuły (T) jest tautologią, lecz także jej uogólnienie, czyli formuła $R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow (... \rightarrow (R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow \varphi) ...)$, dla dowolnej $n \in \mathbb{N}$.

Wykażemy, że uogólnienie odpowiednika (T) jest prawdą w modelu $\mathfrak{M}$ wtw $\mathfrak{M} \in M^{\mathbf{t}}_{PLE}$. Załóżmy, że $\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow (... \rightarrow (R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow \varphi) ...)$. Przyjmijmy również, że $\mathfrak{M} \notin M^{\mathbf{t}}_{PLE}$, czyli: $\mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)>, \varphi) = 1, ..., \mathbb{V}(<f(\alpha_n)>, \varphi) = 1$ oraz $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$. Zatem otrzymujemy $\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi$, $\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_n}$ i $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$, co przeczy założeniu. Dowód implikacji w drugą stronę jest oczywisty: wystarczy odwołać się do warunku prawdziwości formuł zbudowanych za pomocą operatora realizacji.

Jeżeli natomiast chcemy jako tautologie uzyskać uogólnienie odpowiednika formuły (4), tj. formułę $R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} R_{\alpha_{n+1}} \varphi$, to powinniśmy rozważyć logikę wyznaczoną na przykład przez klasę modeli M^4_{PLE} spełniających następujący warunek, dla dowolnej $\varphi \in For_{PLE}$, dowolnej $n \in \mathbb{N}$ i dowolnej $\alpha_i \in Si$, gdzie $i \leq n$:

$$\mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)>, \varphi) = 1 \Rightarrow \mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n), f(\alpha_{n+1})>, \varphi) = 1 \qquad (\mathbf{4})$$

gdzie $\forall_{j,k\, n \in \mathbb{N}} [1 \leq j, k \leq n \Rightarrow f(\alpha_j) = f(\alpha_k)]$.

Wykażemy, że uogólnienie odpowiednika formuły (4) jest prawdą w modelu $\mathfrak{M}$ wtw $\mathfrak{M} \in M^4_{PLE}$. Załóżmy, że $\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi \rightarrow R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} R_{\alpha_{n+1}} \varphi$. Przyjmijmy również, że $\mathfrak{M} \notin M^4_{PLE}$, czyli: $\mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n)>, \varphi) = 1$ oraz $\mathbb{V}(<f(\alpha_1), ..., f(\alpha_n), f(\alpha_{n+1})>, \varphi) \neq 1$. Zatem otrzymujemy $\mathfrak{M} \vDash R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} \varphi$ i $\mathfrak{M} \nvDash R_{\alpha_1} ... R_{\alpha_n} R_{\alpha_{n+1}} \varphi$, co przeczy założeniu. Dowód implikacji w drugą stronę jest oczywisty: wystarczy odwołać się do warunku prawdziwości formuł zbudowanych za pomocą operatora realizacji.

Określone przez nas logiki wymagają niewątpliwie dalszych badań. Niemniej, już na podstawie zarysowanych idei widzimy, że logika pozycyjna daje liczne możliwości analizy zdań wyrażających wiedzę różnego rodzaju podmiotów. Ich niewątpliwą zaletą jest brak odwołań do pojęcia świata możliwego, a w szczególności świata nienormalnego, które w kontekście analizy wiedzy podmiotów umiarkowanie racjonalnych stanowi źródło wielu problemów filozoficznych.

BIBLIOGRAFIA

Bjerring J. C. (2013), *Impossible Worlds and Logical Omniscience. An Impossibility Result*, „Synthese" 190(13), 2505-2524.

Bostock D. (1997), *Intermediate Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Jarmużek T. (2007), *Minimal Logical Systems with R-operator. Their Metalogical Properties and Ways of Extensions* [w:] *Perspectives on Universal Logic*, J. Béziau, A. Costa-Leite (eds.), Milano: Polimetrica, 319-333.

Jarmużek T. (2013), *Jutrzejsza bitwa morska. Rozumowanie Diodora Kronosa*, Toruń: Wydawnictwo Naukowe UMK.

Jarmużek T., Pietruszczak A. (2004), *Completness of Minimal Positional Calculus*, „Logic and Logical Philosophy" 1(13), 147-162.

Jarmużek T., Tkaczyk M. (2015), *Normalne logiki pozycyjne*, Lublin: Towarzystwo Naukowe KUL.

Karczewska A. (2017), *Maximality of the Minimal R-logic*, „Logic and Logical Philosophy" 27(2), 193-203.

Lechniak M. (1988), *Logika epistemiczna Jerzego Łosia a teoria racjonalnego zachowania*, „Roczniki Filozoficzne KUL" 26(1), 79-91.

Lechniak M. (2011), *Przekonania i zmiana przekonań. Analiza logiczna i filozoficzna*, Lublin: Wydawnictwo KUL.

Lemmon E. J. (1959), *Is There Only One Correct System of Modal Logic?*, „Aristotelian Society Supplement" 33(1), 23-56.

Łoś J. (1947), *Podstawy analizy metodologicznej kanonów Milla*, „Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska" 2.5F, 269-301.

Łoś J. (1948), *Logiki wielowartościowe a formalizacja funkcji intensjonalnych*, „Kwartalnik Filozoficzny" 17(1-2), 23-56.

Meyer J.-J. (2001), *Epistemic Logic* [w:] *Blackwell Guide to Philosophical Logic*, L. Goble (ed.), Oxford: Blackwell Publishing, 183-202.

Rescher N. (1968), *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht: Reidel.

Surowik D. (2013), *Logika, wiedza i czas. Problemy i metody temporalno-logicznej reprezentacji wiedzy*, Białystok: Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku.

Świrydowicz K. (2014), *Podstawy logiki modalnej*, Poznań: Zysk i S-ka.

Tkaczyk M. (2009), *Logika czasu empirycznego*, Lublin: Towarzystwo Naukowe KUL.

Tkaczyk M. (2013), *Negation in Weak Positional Calculi*, „Logic and Logical Philosophy" 22(1), 3-19.