PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVI – ZESZYT 2 – 2009

BOGUSŁAW GUZIK

POSTULAT KOINCYDENCJI NAKŁADÓW I REZULTATÓW W BADANIACH EMPIRYCZNYCH DEA

1. WSTĘP

Przystępując do ustalania efektywności obiektów gospodarczych czy społecznych za pomocą metod *Data Envelopment Analysis* (DEA) trzeba, między innymi, określić listę rezultatów oraz listę nakładów, w sensie których oceniana będzie efektywność obiektów. Poza pojawiającymi się niekiedy oczywistymi sformułowaniami typu, że w charakterze nakładów należy brać te wielkości, które wykazują wyraźny związek merytoryczny z rezultatami, w literaturze na ogół brak jest jakichś sprecyzowanych sugestii w tym zakresie. Zupełnie odmienna sytuacja ma miejsce w ekonometrii, gdzie problem doboru zmiennych objaśniających jest znany i poświęcono mu wiele miejsca. Jak wiadomo bardzo wartościowe wyniki uzyskali tu uczeni polscy, np. Hellwig oraz Czerwiński[1].

W literaturze dotyczącej DEA na ogół twierdzi się też, że rezultaty mają charakter stymulant, co znaczy, że ich wzrost oceniany jest korzystnie, a nakłady mają charakter destymulant – co znaczy, że ich wzrost oceniany jest niekorzystnie. W artykule dyskutujemy z tą, naszym zdaniem nazbyt ogólnikową, tezą.

W niniejszej pracy formułujemy postulaty dotyczące ogólnych relacji między nakładami a rezultatami w modelach DEA. Wprowadzamy też kryteria zgodności (= *koincydencji*) nakładów z rezultatami. Postulat koincydencja w modelach DEA rozpatrujemy w innym sensie niż zaproponowany przez Z. Hellwiga[2] postulat dotyczący modeli ekonometrycznych.

2. POSTULAT KOINCYDENCJI NAKŁADÓW I REZULTATÓW

Niech X_n będą zmiennymi reprezentującymi wielkości nakładów $n = 1, \ldots, N$; natomiast Y_r niech będą zmiennymi reprezentującymi wielkości rezultatów $r = 1, \ldots, R$. W *Data Envelopment Analysis* na ogół przyjmuje się, co też zakładamy w całym artykule, że zmienne charakteryzujące rezultaty są *stymulantami*. Oznacza to, że większa wartość zmiennej Y_r oznacza większy poziom rezultatu r-tego rodzaju i jest tym korzystniej, im zmienna Y_r ma większą wartość. Natomiast w odniesieniu do nakładów, jak już wspomniano we wstępie, przyjmuje się, że mają one charakter *destymulant*, czyli

[1] Hellwig [7], Czerwiński [4].
[2] Hellwig [8].

takich zmiennych, że coraz ich większa wartość oceniana jest niekorzystnie, a coraz mniejsza – korzystnie.

Ostatnie określenie budzi jednak wątpliwości. Jest zrozumiałe, że chcielibyśmy minimalizować nakłady, bo to jest korzystne. Niemniej nie można rozumieć tego bezwarunkowo, jako sugestię, że każdy wzrost nakładów jest niekorzystny, a każdy spadek jest korzystny, i że dla uznania pewnej wielkości za nakład trzeba, aby jej spadek oceniany był korzystnie. Nie trzeba bowiem przekonywać, że spadek ów może być związany z jeszcze większym spadkiem rezultatów, co właśnie będzie niekorzystne. Z drugiej strony wzrost nakładu nie może być *a priori* uznany za niekorzystny, gdyż warunkiem wzrostu rezultatów na ogół jest wzrost nakładów. Dlatego „literaturowe" określenie nakładu jako destymulanty jest niewystarczające.

Za podstawową cechę nakładu należy uznać, że – oprócz oczywistego merytorycznego lub co najmniej symptomatycznego związku z rezultatami – jest to wielkość, która zmienia się *w tym samym kierunku* co rezultaty.

Postulat 1

– Jeśli rezultaty mając charakter stymulant, to zmienną X_i możemy uznać za *nakład*, gdy – w warunkach *ceteris paribus* – dla wzrostu rezultatów konieczny jest wzrost zmiennej X_i.

– Warunki *ceteris paribus* oznaczają, że wszystkie pozostałe nakłady X_n ($n = 1, \ldots, N$; $n \neq i$) są ustalone. Ustalona jest też technologia przekształcania nakładów w rezultaty.

Postulat 1 stwierdza, że jeśli nic się nie zmienia, to wzrost rezultatu może być osiągnięty jedynie poprzez wzrost nakładu. Przez symetrię do niego można byłoby sugerować, że zmienna X_i traktowana jako nakład, musi też mieć własność, że – w warunkach *ceteris paribus* – spadkowi rezultatów odpowiada spadek zmiennej X_i. Byłoby to jednak żądanie zbyt daleko idące, bowiem przyczyną spadku rezultatów niekoniecznie musi być zmniejszenie nakładów. Może nią być np. *rozrzutność* (*marnotrawstwo*) nakładów, czyli stabilizacja lub wzrost nakładów przy malejących rezultatach. Ponadto postulat spadku nakładów, gdy rezultaty maleją oraz wzrostu nakładów, gdy rosną rezultaty przesądzałby od razu, że rozpatrujemy tylko sytuacje, gdy każdy nakład jest efektywny w sensie Pareto, czego – oczywiście – tu nie czynimy[3].

Nie będziemy przyjmowali tego rozszerzonego postulatu. Ograniczymy się tylko do postulatu 1. Żąda on zgodności dodatniego kierunku zmian nakładów i rezultatów i dlatego nazwiemy go postulatem *dodatniej koincydencji kierunków zmian* nakładów i rezultatów, krócej: postulatem *koincydencji nakładów i rezultatów*.

Postulat 2

– W modelu DEA wszystkie zmienne reprezentujące nakłady muszą być koincydentne z rezultatami.

---

[3] Naturalnie, z matematycznego punktu widzenia obie te sytuacje (wzrost *X* – wzrost *Y*; spadek *X* – spadek *Y*) są równoprawne. Niemniej z ekonomicznego punktu widzenia są one różne. O ile w warunkach *ceteris paribus* wzrost rezultatów wymaga wzrostu nakładów, o tyle spadek rezultatów może mieć miejsce bez spadku nakładów. Oznacza to swego rodzaju „półefektywność" Pareto.

3. ILUSTRACJA EMPIRYCZNA SKUTKÓW BRAKU KOINCYDENCJI

Zilustrujemy na przykładzie liczbowym niektóre niekorzystne konsekwencje braku koincydencji nakładów i rezultatów w modelu DEA. Wykorzystamy ukierunkowany na nakłady model nadefektywności (*super-efficiency*) CCR, który kodujemy jako SE-CCR. Jak wiadomo daje on to samo co model CCR, a dodatkowo pozwala na rangowanie obiektów oraz przeprowadzanie wielu wartościowych analiz ekonomicznych[4].

3.1. DANE EMPIRYCZNE

W tabeli 1 podano dane empiryczne dotyczące dwóch rezultatów Y_1, Y_2 oraz czterech zmiennych wstępnie uznanych za nakłady: X_1, X_2, X_3, X_4 w 10 obiektach. Dane są uporządkowane w kolejności rosnącej obu rezultatów.

Tabela 1

Dane empiryczne

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Y_1	100	103	141	181	220	223	250	298	299	300
Y_2	50	80	100	105	118	119	130	140	170	180
X_1	100	145	170	180	204	206	218	230	241	400
X_2	300	311	317	318	325	326	330	340	346	500
X_3	20	22	24	28	31	35	38	42	48	60
X_4	100	88	85	70	65	51	50	18	17	10

Źródło: dane umowne.

Korelacje zmiennych reprezentujący nakłady wynoszą:

Zmienne	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1	0,943	0,944	-0,846
X_2	0,943	1	0,844	-0,681
X_3	0,944	0,844	1	-0,956
X_4	-0,846	-0,681	-0,956	1

[4] Model SE-CCR jest stosunkowo prostym uogólnieniem podstawowego dla DEA modelu CCR Charnesa, Coopera i Rhodesa [3]. Model SE-CCR zaproponowano w pracach Bankera i Gilforda [2] oraz Andersena-Petersena [1]. Opis modelu SE-CCR i jego własności – zob. np. Guzik [5]. Samo sformułowanie modelu SE-CCR podamy za chwilę.

Korelacje zmiennych X nie są równe 1, co jest ważne, gdyż nakłady skorelowane w stopniu 1 można reprezentować jednym nakładem, a wyniki modelu SE-CCR nie ulegną zmianie. Korelacje nie są też bliskie zeru, co odpowiada typowym sytuacjom badań empirycznych.

Jak można zauważyć, w ślad za wzrostem rezultatów Y_1, Y_2, rosną również nakłady X_1, X_2, X_3. Zmienne te są więc koincydentne z rezultatami. Natomiast wartości zmiennej X_4 – wbrew postulatowi koincydencji – maleją. Zmienna ta jest niekoincydentna względem rezultatów.

3.1. UKIERUNKOWANE NA NAKŁADY STANDARDOWE ZADANIE SE-CCR

Dla każdego obiektu mamy osobne zadanie SE-CCR. Zadanie dla obiektu o ($1 \leq o \leq J$) ma następującą postać:

Dane

– Lista obiektów $j = 1, \ldots, J$; lista nakładów $n = 1, \ldots, N$ oraz lista rezultatów $r = 1, \ldots, R$.

– Wielkości rezultatów w poszczególnych obiektach, y_{rj} ($r = 1, \ldots, R$; $j = 1, \ldots, J$).

– Wielkości nakładów w poszczególnych obiektach, x_{nj} ($n = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, J$).

Wszystkie rezultaty są nieujemne, a nakłady są dodatnie. Przez K_o oznaczamy zbiór wszystkich obiektów oprócz obiektu o-tego, czyli $K_o = \{1,\ldots, J\} \setminus \{o\}$.

Zmienne decyzyjne

ρ_o – *mnożnik poziomu nakładów obiektu o-tego,*

λ_{oj} ($j \in K_o$) – *wagi intensywności.*

Mnożnik ρ_o określa krotność nakładów obiektu o-tego, jaką muszą zastosować pozostałe obiekty (= *konkurenci technologiczni* obiektu o-tego), aby uzyskać przynajmniej jego rezultaty. Waga intensywności λ_{oj} określa krotność technologii empirycznej obiektu j-ego występującą w technologii wspólnej konkurentów obiektu o-tego.

Funkcja celu

$$\min \rho_o \tag{1}$$

Warunki ograniczające i znakowe

$$\sum_{j \in K_o} \lambda_{oj} y_{rj} \geq y_{ro} \quad (r = 1, \ldots, R); \tag{2}$$

$$\sum_{j \in K_o} \lambda_{oj} x_{nj} \leq \rho_o x_{no} \quad (r = 1, \ldots, N); \tag{3}$$

$$\rho_o, \lambda_{oj} \geq 0 \quad (j \in K_o). \tag{4}$$

Uzyskany na podstawie modelu SE-CCR optymalny mnożnik nakładów ρ_o jest *wskaźnikiem rankingowym* obiektu o-tego. Określa on, jaką przynajmniej krotność nakładów obiektu o-tego musiałyby wykorzystać pozostałe obiekty w swej optymalnej technologii wspólnej, aby otrzymać rezultaty nie gorsze od uzyskanych przez obiekt o-ty. Obiekt jest w pełni efektywny w sensie Farrela, gdy $\rho_o \geq 1$, a więc gdy inni – nawet w swej optymalnej technologii wspólnej – dla uzyskania rezultatów otrzymanych przez obiekt o-ty, muszą poczynić nakłady nie mniejsze od poniesionych przez obiekt o-ty. W przypadku $\rho_o < 1$ obiekt o-ty jest nieefektywny, bowiem inne obiekty dla uzyskania rezultatów obiektu o-tego potrzebują mniej nakładów niż ich zużył obiekt o-ty.

3.3. WYNIKI EMPIRYCZNE

Niech $\mathbf{X}$ oznacza ustaloną wcześniej listę zmiennych koincydentnych. Ponadto niech X_d oznacza pewną zmienną koincydentną nie występującą w liście $\mathbf{X}$, zaś X^{nk} niech oznacza zmienną niekoincydentną.

Dla zbadania skutków braku koincydencji porównamy rozwiązanie modelu SE-CCR otrzymywane przy liście nakładów $\mathbf{X} \cup X_d$ zawierającej tylko zmienne koincydentne, z rozwiązaniem otrzymywanym przy „mieszanej" liście nakładów $\mathbf{X} \cup X^{nk}$, zawierającej zmienne koincydentne oraz zmienną niekoincydentną X^{nk}. W naszym przykładzie zmienną niekoincydentną jest X_4. Obie listy, $\mathbf{X} \cup X_d$ oraz $\mathbf{X} \cup X^{nk}$ są rozszerzeniem listy $\mathbf{X}$ o jeden element.

W tabeli 2 przedstawiono, wynikające z optymalnego rozwiązania modelu SE-CCR, optymalne mnożniki rankingowe dla poszczególnych wariantów listy zmiennych reprezentujących nakłady. Obok kolumny dla listy $\mathbf{X}$ podano kolumnę dla listy $\mathbf{X} \cup X_4$. Lista rezultatów jest stała i obejmuje Y_1 oraz Y_2.

Tabela 2

Optymalne mnożniki rankingowe dla różnych list zmiennych reprezentujących nakłady

Obiekt	Kombinacje zmiennych reprezentujących nakłady													
	1	1,4	2	2,4	3	3,4	1,2	1,2,4	1,3	1,3,4	1,2,3	1,2,3,4	1,2,3	1,2,3,4
O_1	0,782	0,782	0,382	0,382	0,705	0,705	0,782	0,782	0,782	0,782	0,782	0,782	0,782	0,782
O_2	0,782	0,782	0,524	0,524	0,873	0,873	0,782	0,782	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905
O_3	0,834	0,834	0,642	0,642	1,095	1,095	0,834	0,834	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095
O_4	0,827	0,827	0,672	0,672	0,959	0,959	0,827	0,827	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974	0,974
O_5	0,857	0,857	0,780	0,780	1,058	1,058	0,857	0,857	1,058	1,058	1,058	1,058	1,058	1,058
O_6	0,859	0,859	0,788	0,788	0,898	0,924	0,859	0,859	0,935	0,935	0,935	0,935	0,935	0,935
O_7	0,905	0,905	0,871	0,871	0,927	0,945	0,905	0,905	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961	0,961

cd. tabeli 2

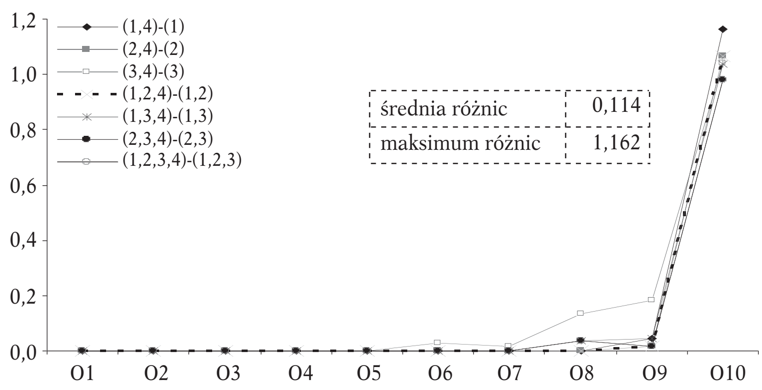
Obiekt	Kombinacje zmiennych reprezentujących nakłady													
	1	1,4	2	2,4	3	3,4	1,2	1,2,4	1,3	1,3,4	1,2,3	1,2,3,4	1,2,3	1,2,3,4
O_8	1,044	1,044	1,014	1,014	1,000	1,132	1,044	1,044	1,095	1,132	1,098	1,132	1,098	1,132
O_9	1,159	1,204	1,193	1,211	0,912	1,094	1,193	1,211	1,159	1,204	1,193	1,211	1,193	1,211
O_{10}	0,638	1,800	0,733	1,800	0,758	1,800	0,733	1,800	0,763	1,800	0,820	1,800	0,820	1,800

Źródło: obliczenia własne zmienna nr 4 – zmienna niekoincydentna.

Uwaga

Porównując kolumny tabeli 2 trzeba pamiętać o fakcie matematycznym, że każde rozszerzenie listy nakładów lub rezultatów skutkuje tym, że współczynniki rankingowe nie maleją, czyli rosną lub pozostają na poprzednim poziomie. Wynika to z własności zadania programowania liniowego, którego szczególnym przypadkiem jest model SE-CCR[5]. Dlatego też współczynniki rankingowe dla listy **X** są nie większe od współczynników dla listy $\mathbf{X} \cup \mathbf{D}$, gdzie **D** – lista zmiennych „dodanych". W szczególności więc, jeśli do listy zmiennych koincydentnych (nawet bardzo dużej) dołączymy tylko jedną zmienną niekoincydentną, czyli o przeciwnym charakterze niż dotychczasowe, to niektóre współczynniki rankingowe i tak wzrosną, a pozostałe nie ulegną zmianie.

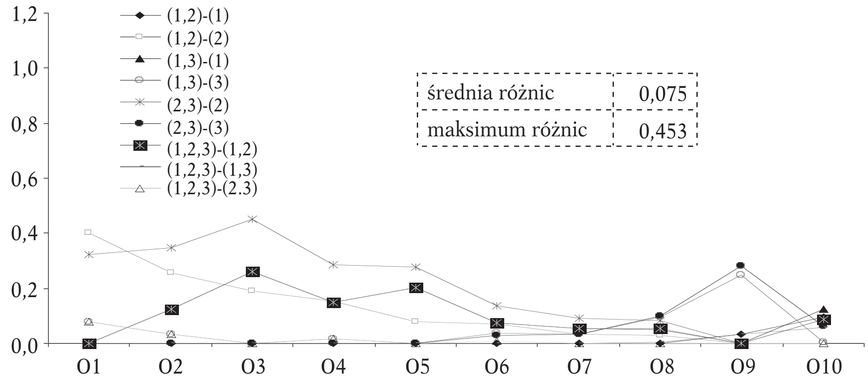
Na rys. 1 zilustrowano kształtowanie się różnic wskaźników rankingowych dla kombinacji niekoincydentnej $\mathbf{X} \cup X_4$ oraz kombinacji koincydentnej **X**.



Rysunek 1. Różnice między wskaźnikami rankingowymi dla kombinacji $\mathbf{X} \cup X_4$ oraz **X**

Natomiast na rys. 2 zilustrowano kształtowanie się różnic wskaźników rankingowych kombinacji koincydentnej $\mathbf{X} \cup X_d$ oraz kombinacji **X**. Oczywiście $X_d \notin \mathbf{X}$. Oba rysunki wykonano w tej samej skali.

[5] Zob. np. Guzik [5].



Rysunek 2. Różnice między wskaźnikami rankingowymi dla kombinacji $\mathbf{X} \cup X_d$ oraz $\mathbf{X}$

Przykładowe wnioski

1. Nie ma jakiejś jednej matematycznej reguły dotyczącej zmian wskaźnika rankingowego w przypadku dołączenia zmiennej niekoincydentnej do zbioru zmiennych koincydentnych[6]. Przyrosty wskaźnika rankingowego na skutek dołączenia do listy zmiennych koincydentnych pewnej innej zmiennej niekoincydentnej mogą być mniejsze lub większe od przyrostu wskaźnika rankingowego na skutek dołączenia zmiennej koincydentnej do listy zmiennych koincydentynych.

2. Ogólnie jednak – jak pokazuje ta i wiele innych analiz empirycznych – dołączenie zmiennej niekoincydentnej wprowadza większe niestabilności kształtowania się współczynników rankingowych oraz większe ich zróżnicowanie co do skali i – na ogół – większe zróżnicowanie co do średniej (por. skalę zmian na rys. 1 oraz rys. 2 i podane tam średnie zmian).

3. Przykład potwierdza to, co można było przypuszczać. Dla obiektów, w których wartość zmiennej niekoincydentnej jest bardzo korzystna (relatywnie duże rezultaty przy małych nakładach) współczynnik rankingowy dla listy uwzględniającej zmienną niekoincydentną jest wyraźnie większy niż w przypadku, gdy zamiast niej występuje zmienna koincydentna (zob. wyniki dotyczące O_8, O_9, O_{10}). Natomiast dla obiektów, w których wartość zmiennej niekoincydentnej jest mało korzystna (wysoka przy niskich nakładach), wskaźnik rankingowy w przypadku listy zawierającej tę zmienną niekoincydentną jest zauważalnie mniejszy niż gdyby zamiast niej występowała zmienna koincydentna (zob. wyniki dla O_1 – O_6).

4. Dołączenie pojedynczej zmiennej koincydentnej nawet do listy kilku zmiennych koincydentnych może spowodować, że obiekty, które do tej pory były niezbyt efektywne, nagle stają się wysoce efektywne. Zachodzi więc zjawisko podobne do zjawiska *katalizy* wykrytego i zbadanego w modelach ekonometrycznych przez Z. Hellwiga[7]. Natomiast inne obiekty, które przy różnych konfiguracjach zmiennych koincydentnych były efektywne, stają się nieefektywne.

---

[6] Oprócz tej oczywiście, że współczynnik rankingowy nie maleje.
[7] Hellwig [9].

Dla szerszego porównania zmian wskaźników rankingowych wskutek przyłączenia zmiennej niekoincydentnej zbadano jeszcze kształtowanie się wskaźników przy różnych poziomach zmiennej niekoincydentnej X_4 oraz różnych poziomach rezultatu Y_1 w obiekcie O_{10}. Do tej pory w tym obiekcie nakład $X_4 = 10$, rezultat $Y_1 = 300$. Obliczenia dotyczą listy rezultatów $\{Y_1, Y_2\}$ oraz listy zmiennych charakteryzujących nakłady: X_1, X_2, X_4 (dwie pierwsze są koincydentne, trzecia – nie jest). Relatywny zakres zmian rezultatu Y_1 oraz nakładu X_4 jest taki sam, mianowicie jest to 3-krotny spadek rezultatu Y_1 oraz 3-krotny wzrost zmiennej X_4. Wyniki obliczeń zawiera tabela 3.

Tabela 3

Wskaźniki rankingowe dla różnych poziomów zmiennej X_4 oraz Y_1 w obiekcie O_{10}

Zmienna X_4	**10**	10	10	10	10	10	**20**	20	20	20	20	20	**30**	30	30	30	30	30
Zmienna Y_1	300	270	250	200	150	100	300	270	250	200	150	100	300	270	250	200	150	100
O_1	0,78	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87	0,78	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87	0,78	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87
O_2	0,78	0,78	0,78	0,80	0,84	0,86	0,78	0,78	0,78	0,80	0,84	0,86	0,78	0,78	0,78	0,80	0,84	0,86
O_3	0,83	0,83	0,83	0,88	0,91	0,93	0,83	0,83	0,83	0,88	0,91	0,93	0,83	0,83	0,83	0,88	0,91	0,93
O_4	0,83	0,88	0,91	0,94	0,95	0,96	0,83	0,88	0,91	0,94	0,95	0,96	0,83	0,88	0,91	0,94	0,95	0,96
O_5	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96
O_6	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96	0,86	0,93	0,95	0,96	0,96	0,96
O_7	0,91	0,98	1,06	1,12	1,13	1,14	0,91	0,98	1,06	1,12	1,13	1,14	0,91	0,98	1,06	1,12	1,13	1,14
O_8	1,04	1,04	1,04	1,02	1,00	0,94	1,04	1,04	1,04	1,02	1,00	0,95	1,04	1,04	1,04	1,02	1,00	0,95
O_9	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29	1,29
O_{10}	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73

Źródło: obliczenia własne.

Przykładowe wnioski

1. Zmiany poziomu zmiennej niekoincydentnej X_4 wywoływały znacznie większe zmiany współczynników efektywności niż tej samej krotności zmiany rezultatu Y_1.

2. Dotyczy to szczególnie obiektów, w których występuje bardzo niski (czyli bardzo korzystny) poziom zmiennej niekoincydentnej (tu są to obiekty O_9 oraz O_{10}). Np. dwukrotny wzrost zmiennej X_4 z poziomu 10 do poziomu 20 spowodował dwukrotne zmniejszenie wskaźnika rankingowego obiektu O_{10}, przy $X_4 = 20$ obiekt O_{10} stał się wręcz nieefektywny. Natomiast dwukrotny spadek rezultatu Y_1 (np. z 300 do 150) przy ustalonym poziomie zmiennej X_4 nie wywoływał żadnej zmiany wskaźnika rankingowego obiektu O_{10}.

3. Odwrotnie jest w wypadku obiektów, dla których zmienna niekoincydentna ma wartość niekorzystną (dużą) – por. np. wyniki dla O_1 – O_6. W tym wypadku ich

efektywność poprawiała się tylko w miarę spadku rezultatu Y_1 w obiekcie O10 oraz – przy danym poziomie Y_1 – wręcz nie zmieniała się wraz ze zmianami poziomu zmiennej X_4 w obiekcie O10[8].

Niekoincydentność zmiennej reprezentującej nakłady jest z jednej strony anormalnym zjawiskiem ekonomicznym, gdyż uzyskiwanie coraz większych rezultatów kosztem coraz mniejszych nakładów dystansuje nawet znane z ekonomii matematycznej pojęcie „rogu obfitości"[9]. Z drugiej strony, na podstawie przeprowadzonych powyżej symulacji widać, że zmienne niekoincydentne deformują obraz efektywności obiektów. Trzeba więc takie zmienne usuwać z zadań DEA. W następnej części artykułu sformułowano niektóre metody rozpoznawania niekoincydentych zmiennych reprezentujących nakłady.

4. MIERNIKI KOINCYDENCJI

Podamy propozycje dwóch klas mierników koincydencji (= *zgodności*). Pierwsze oparte są na badaniu monotoniczności wzrostu i dlatego mówią one o koincydencji (zgodności) *uporządkowań*. Drugi rodzaj mierników to mierniki oparte na badaniu korelacji, mówią one o koincydencji (zgodności) *korelacyjnej*.

4.1. MIERNIK „SILNEJ" KOINCYDENCJI UPORZĄDKOWAŃ

Procedura jest prosta:

1. Dla danej zmiennej X_n ustalamy, jak często w ślad za wzrostem lub stabilizacją rezultatu Y_r, wzrastają lub nie ulegają zmianie wartości zmiennej X_n.

2. Miernik silnej koincydencji uporządkowań zmiennej X_n z rezultatem Y_r wynosi:

$$S_{n,r} = \frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} s_{n,r}^{j} \tag{5}$$

gdzie:

$$s_{nr}^{j} = \begin{cases} 1 \text{ gdy znak różnicy } (x_{n,j} - x_{n,j-1}) \text{ jest taki sam jak znak } (y_{r,j} - y_{r,j-1}) \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{6}$$

$$j = 2, \ldots, J.$$

Jeśli jedna z wymienionych różnic jest zerowa, przyjmujemy, że ma miejsce zgodność, a więc przyjmujemy $s_{nr}^{j} = 1$.

---

[8] Dla uniknięcia nieporozumień dodać trzeba, że cały czas mówimy o efektywności *względnej*, czyli efektywności *na tle* badanego zbioru obiektów. Dlatego spadek rezultatu Y_1 w obiekcie O_{10} może powodować względnie lepszą sytuację w innych obiektach.

[9] *Róg obfitości* to otrzymanie choćby jakiegoś dodatniego rezultatu przy zerowych nakładach, zob. np. Panek [10], s. 71. Tu rezultat może być dowolnie duży, i w dodatku tym większy, im nakład jest mniejszy.

Definicja 1

Zmienna X_n jest koincydentna z rezultatem r-tym w sensie silnej zgodności uporządkowań, gdy częstość $S_{n,r}$ jest dostatecznie wysoka, a więc gdy:

$$S_{n,r} \geq \gamma \text{ gdzie } \gamma \leq 1 \text{ jest liczbą dostatecznie bliską 1, np. 0,90.} \tag{7}$$

Definicja 2

Zmienna X_n jest, w sensie silnej zgodności uporządkowań, koincydentna z układem rezultatów, Y_r, $r \in U$, gdy jest ona koincydenta w sensie silnej zgodności uporządkowań z wszystkimi rezultatami tego układu, czyli gdy:

$$S_{n,r} \geq \gamma \text{ dla wszystkich } r \in U. \tag{8}$$

Naturalnie, można przyjąć, że $\gamma = 1$. Jest to jednak postulat dość ostry. W praktyce bowiem zdarzają się nietypowe obserwacje, dla których incydentalnie postulat koincydencji nie jest spełniony. Dlatego dopuszczamy, że dla pewnej małej liczby obiektów, np. 5 czy 10%, postulat koincydencji może nie być spełniony.

Przykład

W tabeli 4 podano informacje o kształtowaniu się trzech rezultatów i czterech nakładów.

Tabela 4

Dane empiryczne

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Y_1	4736	3262	33882	5000	146	95,4	500	500	25000	30000
Y_2	239	133	406	7,78	18,8	7,37	54,6	0,09	20,8	1,76
Y_3	55,4	54,6	50,9	53,8	57,0	55,9	52,8	53,1	53,6	59,0
X_1	19836	18714	11077	15935	8172	6879	19764	13223	9245	3866
X_2	626	466	1367	98,7	13,0	12,1	242	57,2	5,5	4,6
X_3	13292	8762	51182	5881	1143	708	5449	346	1547	1283
X_4	4276	2003	35473	2500	249	131	1784	367	355	372

Źródło: dane umowne.

Należy ustalić, czy zmienne proponowane jako nakłady są koincydentne w sensie silnej koincydencji uporządkowań przy $\gamma = 0,90$.

Tabela 5

Znaki przyrostów

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Y_1		–1	1	–1	–1	–1	1	0	1	1
Y_2		–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
Y_3		–1	–1	1	1	–1	–1	1	1	1
X_1		–1	–1	1	–1	–1	1	–1	–1	–1
X_2		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	–1
X_3		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	1	–1
X_4		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	1

Źródło: obliczenia własne.

Znaki przyrostów zmiennych pomiędzy sąsiednimi obiektami zawiera tabela 5. Występujący we wzorze (5) sygnał koincydencji silnej $s_{nr}^{j} = 1$, gdy iloczyn odpowiednich podanych w tabeli 5 liczb wynosi 1 lub zero.

Wartości miernika silnej koincydencji uporządkowań podano w tabeli 6.

Tabela 6

Mierniki silnej koincydencji uporządkowań

Zmienne	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	5/9	5/9	4/9
X_2	7/9	7/9	2/9
X_3	8/9	8/9	3/9
X_4	8/9	6/9	3/9

Wnioski

W sensie miernika silnej koincydencji uporządkowań (przy $\gamma = 0{,}90$) z rezultatem Y_1 koincydentne są zmienne X_3 oraz X_4, a z rezultatem Y_2 – koincydenta jest zmienna X_3.

Nie ma takiej listy zmiennych X (choćby jednoelementowej), która byłaby koincydentna ze wszystkimi rezultatami. Tak więc żadna ze zmiennych X_1, …, X_4 nie powinna być tak traktowana jako nakład przy badaniu efektywności uzyskiwania całego układu rezultatów Y_1, Y_2, Y_3 przez obiekty O_1 – O_{10}.

Kierując się postulatem koincydencji można badać efektywność co najwyżej układu zwierającego dwa rezultaty: Y_1 i Y_2 oraz jeden nakład – X_3.

4.2. MIERNIK „SŁABEJ” KOINCYDENCJI UPORZĄDKOWAŃ

Konstruując miernik silnej koincydencji uporządkowań przyjmowano, że przyrost nakładu jest koincydentny z przyrostem rezultatu, gdy ich znaki są identyczne. W sferze zjawisk społeczno-gospodarczych często jednak należy liczyć się z różnego rodzaju błędami lub nieokreślonością. Wobec tego moglibyśmy dopuścić, że niewielkie odchylenia jeszcze kategorycznie nie świadczą o braku koincydencji[10].

Procedura polegałaby na następującym

1. Ustalamy relatywną (δ_n) lub bezwzględną (Δ_n) wielkość nieodróżnialnego od zera (czyli nieistotnego) przyrostu zmiennej X_n.

2. Dalsze postępowanie przebiega jak w 4.1. z tym, że zamiast zdefiniowanego wzorem (6) wskaźnika monotoniczności bierzemy pod uwagę wskaźnik „przedziałowy”:

$$w_{nr}^{j} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } \left(x_{n,j} - x_{n,j-1}\right) + \Delta_n \geq 0, \text{ o ile przyrost } \left(y_{r,j} - y_{r,j-1}\right) \geq 0 \\ 1 \text{ gdy } \left(x_{n,j} - x_{n,j-1}\right) - \Delta_n \leq 0, \text{ o ile przyrost } \left(y_{r,j} - y_{r,j-1}\right) \leq 0 \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadki; } j = 2, \ldots, J \end{cases} \tag{9}$$

3. Miernik słabej koincydencji uporządkowań określony jest jako:

$$W_{n,r} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=2}^{J} w_{n,r}^{j}. \tag{10}$$

Definicja 3

Zmienna X_n jest koincydenta z rezultatem Y_r w sensie słabej zgodności uporządkowań, gdy

$$W_{n,r} \leq \gamma. \tag{11}$$

Definicja 4

Zmienna X_n jest, w sensie słabej zgodności uporządkowań, koincydentna z układem rezultatów $\{Y_r,\ r \in U\}$, gdy jest koincydenta z wszystkimi rezultatami układu w sensie słabej zgodności uporządkowań:

$$W_{n,r} \leq \gamma \text{ dla wszystkich } r \in U. \tag{12}$$

Wartość Δ_n może być ustalona bezpośrednio lub może wynikać z przyjętej wielkości nieodróżnialnego od zera relatywnego przyrostu δ_n, np. $\Delta_n = \delta_n x_{n,j}$.

Przykład

Przyjmiemy, że przyrost zmiennej X_n niewiększy od 5% wartości tej zmiennej w obiekcie $j-1$ może być traktowany jako przyrost nieodróżnialny od zerowego. W tabeli 7 podano przyrosty zmiennych oraz wielkości $\Delta_n = 0{,}05x_{nj}$

[10] Ogólniejsze ujęcie, naturalnie, prowadzi do zbiorów rozmytych.

Tabela 7

Przyrosty rezultatów i nakładów oraz wielkości Δ

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Y_1		–1474	30620	–28882	–4854	–50,6	404,6	0	24500	5000
Y_2		–106,0	273,0	–398,2	11,0	–11,4	47,2	–54,5	20,7	–19,0
Y_3		–0,8	–3,7	2,9	3,2	–1,1	–3,1	0,3	0,5	5,4
X_1		–1122	–7637	4858	–7763	–1293	12885	–6541	–3978	–5379
Δ		935	553	796	408	343	988	661	462	193
X_2		–160	901	–1268,3	–85,7	–0,9	229,9	–184,8	–51,7	–0,9
Δ		23,3	68,3	4,9	0,65	0,61	12,1	2,86	0,28	0,23
X_3		–4530	42420	–45301	–4738	–435	4741	–5103	1201	–264
Δ		438	2559	294	57,1	35,4	272	17,3	77,3	64,1
X_4		–2273	33470	–32973	–2251	–118	1653	–1417	–12	17
Δ		100	1773	125	12,5	6,5	89,2	18,3	17,7	18,6

Źródło: obliczenia własne.

Z obliczeniowego punktu widzenia wygodnie będzie wprowadzić dwie wielkości. Nazwijmy „górnym” przyrostem zmiennej X_n wielkość *przyrost zmiennej* +Δ, a „dolnym” przyrostem wielkość *przyrost zmiennej* –Δ[11].

Zmienna X_n jest koincydentna ze zmienną Y_n w sensie słabego miernika zgodności uporządkowań, gdy znak przyrostu rezultatu Y_r jest zgodny ze znakiem bądź „dolnego”, bądź „górnego” przyrostu zmiennej X_n.

Znaki „dolnego” oraz „górnego” przyrostu zmiennych reprezentujących nakłady zawiera tabela 8.

Tabela 8

Znaki przyrostów zmiennych

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Y_1		–1	1	–1	–1	–1	1	0	1	1
Y_2		–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
Y_3		–1	–1	1	1	–1	–1	1	1	1
$X_{1(\text{dolny})}$		–1	–1	1	–1	–1	1	–1	–1	–1
$X_{1(\text{górny})}$		1	–1	1	–1	–1	1	–1	–1	–1

[11] Górny przyrost odpowiada wartości $(x_{nj} - x_{n,j-1}) + \Delta$, gdy przyrost nakładu jest ujemny, a dolny przyrost odpowiada wartości $(x_{nj} - x_{n,j-1}) - \Delta$, gdy przyrost nakładu jest dodatni.

cd. tabeli 8

Wyszczególnienie	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
$X_{2(\text{dolny})}$		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	–1
$X_{2(\text{górny})}$		–1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	–1
$X_{3(\text{dolny})}$		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	1	–1
$X_{3(\text{górny})}$		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	1	–1
$X_{4(\text{dolny})}$		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	–1
$X_{4(\text{górny})}$		–1	1	–1	–1	–1	1	–1	1	1

Źródło: obliczenia własne.

Wartości miernika słabej zgodności uporządkowań podano w tabeli 9.

Tabela 9

Mierniki słabej koincydencji uporządkowań

Zmienne	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	5/9	5/9	4/9
X_2	7/9	7/9	2/9
X_3	8/9	8/9	3/9
X_4	9/9	8/9	4/9

Źródło: obliczenia własne.

Wnioski

Słaba koincydencja uporządkowań (przy $\delta = 0,1$ oraz $\gamma \geq 0,9$) ma miejsce tylko dla rezultatu Y_1 oraz Y_2 względem nakładu X_3 oraz X_4. Ten układ dwóch nakładów i dwóch rezultatów zmiennych można uznać za rozwiązanie problemu ustalenia zbioru nakładów koincydentnych względem rezultatów.

Poprawa w stosunku do miernika silnej koincydencji uporządkowań nastąpiła w wyniku tego, że przy w obiekcie O_9 górna granica, a w obiekcie O_{10} dolna granica ma taki sam znak jak przyrost rezultatu Y_2.

4.3. MIERNIK SŁABEJ KOINCYDENCJI KORELACYJNEJ

Definicja 5

Zmienna X_n reprezentująca nakład n-ty jest koincydentna z rezultatem Y_r w sensie słabej zgodności korelacyjnej, gdy współczynnik korelacji prostej, k_{nr}, między wektorami obserwacji tych wielkości: $\mathbf{x}_n = [x_{nj}]$, $_{j\,=\,1,\ldots,\,J}$; $\mathbf{y}_r = [y_{rj}]$, $_{j\,=\,1,\ldots,\,J}$ jest dodatni:

$$k_{nr} > 0. \tag{13}$$

Definicja 6

Zmienna X_n jest koincydentna w sensie słabej zgodności korelacyjnej z układem rezultatów $\{Y_r;\ r \in U\}$, gdy w tym właśnie sensie jest koincydenta względem wszystkich rezultatów układu, czyli gdy:

$$k_{nr} > 0 \text{ dla wszystkich } r \in U. \tag{14}$$

Przykład

Współczynniki korelacji między scharakteryzowanymi w tabeli 4 rezultatami a zmiennymi reprezentującymi nakłady są następujące (tabela 10):

Tabela 10

Współczynniki korelacji prostej

Zmienne	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	-0,472	0,297	-0,488
X_2	0,410	0,987	-0,564
X_3	0,535	0,936	-0,581
X_4	0,580	0,876	-0,582

Źródło: obliczenia własne.

Wnioski

W sensie miernika słabej koincydencji korelacyjnej wszystkie zmienne $X_1, \ldots, X_4$ są koincydentne tylko z rezultatem Y_2. Układ X_2, X_3, X_4 jest natomiast koincydentny z rezultatem Y_1. Żadna ze zmiennych reprezentujących nakłady nie jest koincydentna z rezultatem Y_3.

Ani jedna ze zmiennych $X_n (1 \leq n \leq 4)$ nie jest koincydentna z całym badanym układem rezultatów Y_1, Y_2, Y_3.

4.4. MIERNIK SILNEJ KOINCYDENCJI KORELACYJNEJ

Badanie współczynników korelacji prostej, choć często stosowane przez niestatystyków i nieekonometryków, jest jednak niekompletne, gdy dany rezultat zależy od wielu nakładów. Dlatego bardziej poprawne postępowanie polegałoby na badaniu zależności danego rezultatu od *wszystkich* nakładów, co oznacza badanie cząstkowego wpływu na rezultat Y_r poszczególnych zmiennych X_n na tle całego układu tych zmiennych. Prowadzi to, oczywiście, do koncepcji współczynników *korelacji cząstkowej*.

Niech więc c_{nr} oznacza współczynnik korelacji cząstkowej między zmienną X_n a rezultatem Y_r w sytuacji, gdy rezultat ten zależy od wszystkich zmiennych $X_1, \ldots, X_N$ według równania regresji liniowej:

$$Y_r = \sum_{n=1}^{N} a_{nr} X_n + a_{0r}, \tag{15}$$

gdzie parametry wyznaczono klasyczną mnk.

Jak wiadomo, znak współczynnika korelacji cząstkowej c_{nr} jest taki sam jak znak współczynnika regresji a_{nr}.

1. Postępowanie może polegać na oszacowaniu, dla każdego rezultatu Y_r, klasyczną metodą najmniejszych kwadratów liniowego równania regresji (15).

2. Następnie sprawdzamy, czy znaki współczynników kierunkowych są dodatnie.

Definicja 7

Zmienna X_n ($1 \leq n \leq N$) jest koincydentna w silnym sensie korelacyjnym z nakładem Y_r, gdy

$$a_{nr} > 0 \text{ (lub współczynnik korelacji cząstkowej } c_{nr} > 0\text{).} \tag{16}$$

Definicja 8

Zmienna X_n ($1 \leq n \leq N$) jest w sensie silnej zgodności korelacyjnej koincydentna względem układu rezultatów, U, gdy jest w tymże sensie koincydentna ze względu na każdy rezultat układu, a więc, gdy:

$$a_{nr} > 0 \text{ (lub } c_{nr} > 0\text{) dla wszystkich } r \in U. \tag{17}$$

Uwagi

Jak wiadomo postulat koincydencji w modelach ekonometrycznych, a szerzej – w modelach regresyjnych – głosi, że znak współczynnika korelacji prostej k_{nr} powinien być identyczny ze znakiem współczynnika korelacji cząstkowej c_{nr}. Tu, w odniesieniu do koincydencji korelacyjnej w modelu DEA, takiego postulatu nie stawiamy. Postulat koincydencji DEA głosi mianowicie, że – z osobna – odpowiedni współczynnik korelacji cząstkowej lub korelacji prostej jest *dodatni*.

Jest zrozumiałe, że można proponować silniejszy postulat, zgodny z podejściem spotykanym w ekonometrii, żeby oba współczynniki korelacji (cząstkowej i prostej) jednocześnie były dodatnie[12]. Tego jednak, mając na uwadze zupełnie odmienną interpretację obu współczynników, nie proponujemy.

Dodajmy przy okazji, że ekonometryczny postulat koincydencji jest zachowany, gdy współczynniki korelacji prostej oraz korelacji cząstkowej są dodatnie lub ujemne. W przypadku współczynnika ujemnego, koincydencja korelacyjna w modelu DEA nie ma jednak miejsca.

[12] Co byłoby zgodne z ideą koincydencji w modelach ekonometrycznych.

Warto zaznaczyć, że po odpowiednich modyfikacjach sformułowane tu cztery metody badania koincydencji w modelach DEA, mogłyby być zaadaptowane dla potrzeb modelowania ekonometrycznego. Byłoby to jednak inne rozumienie koincydencji niż dotychczasowe.

Przykład

Na podstawie danych z tabeli 4, oszacowano klasyczną mnk liniowe równania regresji dla rezultatów:

$$Y_r = \sum_{n=1}^{4} a_{nr} X_n + a_{0r}. \tag{18}$$

Wyniki przedstawiono w tabeli 11.

Tabela 11

Parametry liniowych równań regresji (18)

Zmienne	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	–1,591	–0,0035	–0,00045
X_2	–46,2	0,35	0,00056
X_3	4,71	0,012	0,00072
X_4	–4,17	–0,013	–0,00116

Źródło: obliczenia własne.

Wnioski

Zmienna X_1 oraz X_4 nie są koincydentne z żadnym rezultatem w sensie silnej zgodności korelacyjnej. Zmienna X_2 jest natomiast koincydentna z drugim i trzecim rezultatem, a zmienna X_3 – z pierwszym, drugim i trzecim.

Kierując się silnym kryterium korelacyjnym należałoby badać efektywność obiektów na podstawie modelu DEA zawierającego rozpatrywane trzy rezultaty oraz jeden nakład – X_3.

5. PODSUMOWANIE

W tabeli 12 zestawiono wyniki omówionych tu czterech kryteriów koincydencji rezultatów i nakładów w modelach DEA. Symbol T oznacza, że ma miejsce koincydencja w odpowiednim sensie.

Tabela 12

Zestawienie wyników badania koincydencji nakładów z rezultatami

Naklad	Y_1				Y_2				Y_3			
	Słabe porządkowe	Silne porządkowe	Słabe korelacyjne	Silne korelacyjne	Słabe porządkowe	Silne porządkowe	Słabe korelacyjne	Silne korelacyjne	Słabe porządkowe	Silne porządkowe	Słabe korelacyjne	Silne korelacyjne
X_1							T					
X_2			T				T	T				T
X_3	T	T	T	T	T	T	T	T				T
X_4	T	T	T		T		T					

Źródło: obliczenia własne.

Wnioski

1. To, że różne mierniki dają różne wskazania nie powinno nas dziwić.

2. Spośród wykorzystanych mierników, w przykładzie najbardziej „liberalny" jest miernik słabej koincydencji korelacyjnej, natomiast najbardziej „radykalny" jest miernik silnej koincydencji uporządkowań. Jest to intuicyjnie zrozumiałe i wydaje się, że na ogół tak będzie w większości problemów empirycznych.

3. Wyniki przykładu sugerują, że zapewnienie koincydencji w modelach DEA może być poważnym problemem empirycznym (podobnie jak uzyskanie dobrego modelu ekonometrycznego).

4. W przykładzie tylko jeden miernik (silny miernik korelacyjny) sugeruje, że możliwe jest określenie wspólnej listy nakładów dla wszystkich rezultatów. Jest to jednak lista bardzo wąska, jednoelementowa (X_3). Ze słabego kryterium korelacyjnego płynie natomiast sugestia, że sensowne jest zbudowanie model DEA tylko dla dwóch rezultatów: Y_1 oraz Y_2, ale natomiast z trzema nakładami: X_2, X_3, X_4. Z kolei według słabego kryterium porządkowego możliwe jest utworzenia zadania DEA dotyczącego dwóch nakładów (Y_1 oraz Y_2) z dwoma nakładami – X_3, X_4.

W każdym z tych wypadków dochodzi do redukcji wymiarów zadania DEA – albo liczby nakładów, albo liczby rezultatów.

5. Postulat koincydencji ma podłoże metodologiczne, bowiem dziwna byłaby ekonomia, w której w celu zwiększenia rezultatów należałoby zmniejszać nakłady. Ma też podłoże empiryczne. Jeśli bowiem brak jest koincydencji nakładów i rezultatów, wyniki są niestabilne i często sugerują zupełnie „przypadkowy" bardzo wysoki poziom efektywności niektórych obiektów.

6. Wydaje się przeto, że badacze posługujący się metodami DEA, powinni – na wzór ekonometrii – mieć większą świadomość metodologiczną. Nawet jeśli układ nakładów i rezultatów sformułowano w najlepszej wierze, należy za każdym razem sprawdzić, czy spełnione są warunki umożliwiające uzyskanie rzetelnych wyników. Jednym z tych warunków jest omawiany w artykule postulat koincydencji nakładów z rezultatami.

7. Dla jego uzyskania może być potrzebna redukcja albo modyfikacja listy nakładów lub listy rezultatów, lub nawet redukcja czy modyfikacja listy obiektów.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

[1] Andersen P., Petersen N.C., [1993], *A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis*, „Management Science", 39 (10).
[2] Banker R.D., Gilford J.L., [1988], *A relative efficiency model for the evaluation of public health nurse productivity*, Mellon University Mimeo, Cornegie.
[3] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., [1978], *Measuring the efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research".
[4] Czerwiński Z., [1976], *Przyczynek do dyskusji nad problemem „dobrego" modelu ekonometrycznego*, „Przegląd Statystyczny", 4.
[5] Guzik B., [2008], *Model nadefektywności DEA na tle modelu CCR*, „Wiadomości Statystyczne", 1.
[6] Guzik B., *Prosta metoda doboru zestawu nakładów w modelu DEA*, „Przegląd Statystyczny", złożone do druku.
[7] Hellwig Z., [1960], *Problem optymalnego wyboru predykant*, „Przegląd Statystyczny" 3.
[8] Hellwig Z., [1976], *Przechodniość relacji skorelowania zmiennych losowych i płynące stąd wnioski ekonometryczne*, „Przegląd Statystyczny" 1/1985.
[9] Hellwig Z., [1987], *Model ekonometryczny z kompensatorem różnicowym*, „Przegląd Statystyczny", 1.
[10] Panek E., [2003], *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.

Praca wpłynęła do redakcji w marcu 2009 r.

POSTULAT KOINCYDENCJI NAKŁADÓW I REZULTATÓW W BADANIACH EMPIRYCZNYCH DEA

Streszczenie

W artykule wskazano na konieczność uwzględniania postulatów metodologicznych przy formułowaniu listy nakładów oraz rezultatów w zadaniach DEA. W szczególności sformułowano i uzasadniono postulat koincydencji nakładów i rezultatów, który głosi, że kierunek zmiennej uznanej za nakład musi być zgodny z kierunkiem zmian rezultatów. Zaproponowano cztery mierniki koincydencji dotyczące: silnej i słabej koincydencji uporządkowań oraz silnej i słabej koincydencji korelacyjnej.

Słowa kluczowe: DEA, dobór nakładów, koincydencja nakładów

INPUT AND OUTPUT COINCIDENCE POSTULATE IN DEA EMPIRICAL RESEARCH

Summary

The article shows that the selection of input and output variables to DEA models should be based on methodological postulates. Particularly, the author formulates and justifies the postulate of intput and output coincidence, which means that direction of change in input variable shoud be consistent with direction of change in output variable. Four measures of coincendence are provided: the measure of strong and weak order coincidence and strong and weak correlation coincidence.

Key words: DEA, selection of inputs, coincidence of inputs