PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVI – ZESZYT 2 – 2009

BARBARA DAŃSKA-BORSIAK

ZASTOSOWANIA PANELOWYCH MODELI DYNAMICZNYCH W BADANIACH MIKROEKONOMICZNYCH I MAKROEKONOMICZNYCH[1]

1. WPROWADZENIE

Terminem „dane panelowe" określa się we współczesnej ekonometrii dane, powstające z połączenia szeregów czasowych obserwacji dla jednostek przekrojowych. Charakteryzują się one tym, że liczba obserwacji w czasie T jest znacznie mniejsza niż liczba obiektów przekrojowych N. Modele ekonometryczne szacowane na podstawie danych panelowych, w których zakłada się, że na kształtowanie się zmiennej objaśnianej wpływają, oprócz zmiennych objaśniających, niemierzalne, stałe w czasie i specyficzne dla danego obiektu czynniki, zwane efektami grupowymi, nazywane są modelami panelowymi (ang. *panel data models*). Obecność w modelach panelowych efektów grupowych spowodowała konieczność opracowania specyficznych metod estymacji takich modeli. Stałość w czasie efektów grupowych jest przyczyną dodatkowych komplikacji metodologicznych, które pojawiają się przy estymacji modeli dynamicznych. Głównym celem artykułu jest przedstawienie przykładów zastosowania panelowych modeli dynamicznych w analizach ekonomicznych w skali mikro i makro. Szczególny nacisk położony został przy tym na wskazanie czynników różnicujących te dwa przypadki i konsekwencje zastosowania różnych metod estymacji w zależności od rodzaju próby.

2. DANE PANELOWE W MODELOWANIU MIKROEKONOMICZNYM (MIKROPANELE) I MAKROEKONOMICZNYM (MAKROPANELE)

W związku z dynamicznie rosnącą liczbą praktycznych zastosowań modeli panelowych w różnego rodzaju analizach ekonomicznych i wynikającym z tej różnorodności zróżnicowaniem próby pod względem wymiaru czasowego i przekrojowego, w najnowszych opracowaniach (por. np. [6]) pojawiło się rozróżnienie danych panelowych na makropanele i mikropanele. Mikropanele to dane, charakteryzujące się bardzo dużą liczbą obserwacji przekrojowych, sięgającą setek lub nawet tysięcy obiektów; liczba obserwacji w czasie jest natomiast bardzo niewielka – rzadko przekracza dziesięć, zazwyczaj jest to kilka obserwacji. Typowym przykładem mikropanelu są dane pocho-

[1] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007-2009 jako projekt badawczy nr N111 0938 33

dzące z gospodarstw domowych lub inne dane indywidualne. Makropanele charakteryzują się natomiast bardziej ograniczoną liczbą obserwacji przekrojowych (N waha się od kilkunastu do kilkudziesięciu) i dłuższym horyzontem czasowym próby, sięgającym nawet $T = 30$ okresów. Są to zazwyczaj dane wykorzystywane w badaniach makroekonomicznych. Przykładem mogą być dane dla krajów Unii Europejskiej, krajów OECD, dla których dostępne są stosunkowo długie szeregi czasowe, dotyczące wielu zmiennych makroekonomicznych. Modele panelowe estymowane na podstawie makro i mikropaneli wymagają stosowania różnych metod ekonometrycznych. Potrzeba taka wynika z różnych wymiarów tych danych i związanych z nimi pożądanych własności asymptotycznych estymatorów. W przypadku mikropaneli szczególnie ważne są własności asymptotyczne dla $N \to \infty$ i skończonego T, a w przypadku makropaneli – dla $N \to \infty$ i $T \to \infty$ lub własności estymatorów w małych próbach. Ponadto w przypadku makropaneli o szczególnie długim wymiarze czasowym mogą pojawiać się problemy związane z niestacjonarnością, nie występujące w mikropanelach, w których wymiar T jest niewielki. Problemem, który jest typowy dla makropaneli jest natomiast zależność między obiektami (ang. *cross-unit dependence*), powodująca zjawisko korelacji przekrojowej. Nie występuje on zazwyczaj w modelach szacowanych na podstawie mikropaneli, gdyż obiekty są elementami próby losowej, a zatem mało prawdopodobna jest ich wzajemna korelacja.

Dostęp do baz danych zarówno makro, jak i mikropanelowych jest obecnie stosunkowo łatwy, zwłaszcza do baz międzynarodowych, oraz mikropanelowych baz amerykańskich i zachodnioeuropejskich. Przykłady takich baz, wraz z adresami witryn internetowych, są podane i opisane np. w pracy [6], s. 1-5. Pogląd na temat ogromnych rozmiarów baz danych mikropanelowych dać może przykład danych z gospodarstw domowych, zgromadzonych na Uniwersytecie Michigan (USA), znany jako *Panel Study of Income Dynamics* (PSID)[2]. Dane zaczęto zbierać w 1968 roku i pochodziły one z 4800 rodzin. Do 2003 roku w PSID zgromadzono dane o 65 000 jednostkach, a długość szeregów czasowych dochodzi aż do 36 lat.

3. ZARYS NAJCZĘŚCIEJ STOSOWANYCH METOD ESTYMACJI PANELOWYCH MODELI DYNAMICZNYCH

Dynamiczny model panelowy ma postać:

$$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}^T\beta + u_{it} = \gamma y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}^T\beta + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad t = 1, \ldots, T. \quad (1)$$

gdzie $\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ dla wszystkich i, t, α_i – efekt grupowy, losowy lub nielosowy; jeśli α_i są losowe, to $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\mathbf{x}_{it} = [x_{kit}]_{Kx1}$ jest wektorem zmiennych objaśniających o K współrzędnych, β jest wektorem parametrów ($Kx1$), jednakowych dla wszystkich i oraz t.

Jak już wspomniano, do estymacji panelowych modeli dynamicznych należy stosować odrębne metody, inne niż stosuje się dla modeli statycznych. Proponowana w literaturze metodologia bazuje w zasadzie na jednej z trzech metod: Metodzie Zmiennych

[2] Baza dostępna jest na stronie: http://psidonline.isr.umich.edu.

Instrumentalnych (por. [2] i [3]]), Metodzie Największej Wiarygodności (por. [17]), oraz Uogólnionej Metodzie Momentów (GMM) (por. [5], [1], [4], [8]). Najczęściej stosowane w praktyce są metody oparte na GMM, a szczególnie tzw. GMM pierwszych różnic (ang. *first- differenced GMM*), FDGMM, zaproponowana przez Arellano i Bonda w pracy [5], oraz systemowa GMM Blundella i Bonda (ang. *system GMM*), SGMM, por. [8]. Metody bazujące na GMM są omówione np. w książkach [6], [17]. Uwagi na temat GMM dla modeli szeregów czasowych i FDGMM w języku polskim znaleźć też można w artykule [15].

GMM jest metodą umożliwiającą estymację parametrów modelu bezpośrednio z warunków momentów, które mogą być liniowe lub nieliniowe względem parametrów. Postać i liczba warunków momentów wykorzystywanych w procesie estymacji zależą od założeń dotyczących korelacji między zmiennymi $\mathbf{x}_{it}$ a składowymi α_i i ε_{it}. Przy założeniu, że ε_{it} nie wykazuje korelacji w czasie, oraz $\mathbf{x}_{it}$ są skorelowane z α_i, możliwe jest przyjęcie trzech alternatywnych założeń na temat korelacji $\mathbf{x}_{it}$ z ε_{it}. Zmienne $\mathbf{x}_{it}$ mogą być:

– endogeniczne, to znaczy $\mathbf{x}_{it}$ jest skorelowany z wartością bieżącą ε_{it} i wartościami opóźnionymi $\varepsilon_{i,t-s}$, ale nieskorelowana z wartościami przyszłymi $\varepsilon_{i,t+s}$,

– z góry ustalone (słabo egzogeniczne), to znaczy $\mathbf{x}_{it}$ jest nieskorelowany z wartością bieżącą ε_{it}, ale skorelowany z wartościami opóźnionymi $\varepsilon_{i,t-s}$,

– ściśle egzogeniczne, to znaczy $\mathbf{x}_{it}$ jest nieskorelowany z wartością bieżącą ε_{it}, wartościami opóźnionymi $\varepsilon_{i,t-s}$, i z wartościami przyszłymi $\varepsilon_{i,t+s}$.

Możliwe jest też przyjęcie dodatkowych silniejszych założeń, dotyczących korelacji między efektami grupowymi α_i a zmiennymi $\mathbf{x}_{it}$, braku korelacji jednoczesnej: $E(\mathbf{x}_{it}\mathbf{u}_{it}) = \mathbf{0}$ dla $t = 1, \ldots, T$, warunków początkowych lub słabej stacjonarności. Wybór między powyższymi alternatywnymi założeniami wydaje się arbitralny. Ponieważ jednak w większości przypadków dodatkowe warunki momentów są tzw. warunkami ponadidentyfikującymi, to ich właściwość można testować, na przykład za pomocą testu Sargana[3]. Poniżej przedstawiona zostanie w zarysie zasadnicza idea dwóch metod: GMM pierwszych różnic Arellano i Bonda (ang. *first differenced GMM*), FDGMM i systemowej GMM Blundella i Bonda (ang. *system GMM*), SGMM. Jak już wspomniano, są one jednymi z najczęściej stosowanych w praktyce metodami estymacji panelowych modeli dynamicznych, a ponadto prezentowane w kolejnych częściach artykułu przykłady empiryczne bazują właśnie na tych metodach.

Zasadniczą ideę FDGMM przedstawić można następująco: oblicza się pierwsze różnice modelu, w celu usunięcia stałych w czasie efektów grupowych α_i, a następnie zmienne objaśniające w modelu pierwszych różnic zastępuje instrumentami, którymi są poziomy zmiennych, opóźnione o dwa lub więcej okresów. Estymatory parametrów strukturalnych uzyskuje się stosując GMM do modelu pierwszych różnic.

Dokładniej, zastosowanie tej metody wymaga, aby model (1) spełniał założenia: $|\gamma| < 1$, $E(\alpha_i) = E(\varepsilon_{it}) = 0$, $E(\alpha_i\, \varepsilon_{it}) = 0$, $E(\varepsilon_{is}\, \varepsilon_{it}) = 0$ dla $i = 1, \ldots, N$, $t \neq s$ (brak autokorelacji składnika losowego ε_{it}), $E(y_{i1}\, \varepsilon_{it}) = 0$ dla $i = 1, \ldots, N$, $t = 2, \ldots, T$. Jeśli $N \to \infty$ a T jest skończone, to uwzględnione założenia implikują warunki momentów, których postać zależy od charakteru zmiennych $\mathbf{x}_{it}$. Znaczenie mają założenia, doty-

[3] Por. np. [5], [6] lub w języku polskim [15].

czące korelacji tych zmiennych z obiema składowymi składnika losowego modelu (1): z ε_{it} i z α_i.

Jeśli zmienne $\mathbf{x}_{it}$ są ściśle egzogeniczne i skorelowane z efektami grupowymi α_i, to warunki momentów mają postać:

$$E\left(\Delta x_{kit}\,\Delta \varepsilon_{it}\right) = 0 \text{ dla } t = 1, \ldots, T,\ k = 1, \ldots, K, \tag{2}$$

a macierz instrumentów:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \left[y_{i1}, \Delta \mathbf{x}_{i2}^T\right] & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[y_{i1}, y_{i2}, \Delta \mathbf{x}_{i3}^T\right] & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \left[y_{i1}, .., y_{i,T-2}, \Delta \mathbf{x}_{iT}^T\right] \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Przypadek drugi zachodzi, gdy zmienne $\mathbf{x}_{it}$ są z góry ustalone, w sensie ich korelacji z właściwym składnikiem losowym ε_{it}, tzn. dla każdego k zachodzi $E\,(x_{kit}\,\varepsilon_{is}) \neq 0$ dla $t > s$, oraz $E\,(x_{it}\,\varepsilon_{is}) = 0$ dla $s \geq t$, i $\mathbf{x}_{it}$ są skorelowane z α_i. Oznacza to, że bieżące i opóźnione wartości zmiennych $\mathbf{x}_{it}$ są skorelowane z bieżącymi wartościami składnika losowego. Właściwymi instrumentami dla modelu pierwszych różnic uzyskanego z (1) w okresie s są zatem $x_{i,s-1}, \ldots, x_{i1}$. Warunki momentów mają wówczas postać:

$$E\left(x_{ki,t-s}\,\Delta \varepsilon_{it}\right) = 0 \text{ dla } t = 3, \ldots, T, \quad s \geq 2, \tag{4}$$

a macierz instrumentów:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} \left[y_{i1}, \mathbf{x}_{i1}^T, \mathbf{x}_{i2}^T\right] & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[y_{i1}, y_{i2}, \mathbf{x}_{i1}^T, \mathbf{x}_{i2}^T, \mathbf{x}_{i3}^T\right] & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \left[y_{i1}, .., y_{i,T-2}, \mathbf{x}_{i1}^T, \ldots, \mathbf{x}_{i,T-1}^T\right] \end{bmatrix}. \tag{5}$$

W praktyce najczęściej zachodzi jednak przypadek mieszany, gdy elementami wektora $\mathbf{x}_{it}$ są zarówno zmienne ściśle egzogeniczne, jak i z góry ustalone w sensie ich korelacji z ε_{it}, oraz nie wszystkie zmienne $\mathbf{x}_{it}$ są skorelowane z efektami grupowymi α_i. W takim przypadku Arellano i Bond w pracy [5] proponują wykorzystanie idei Hausmana i Taylora zaproponowanej w [16], a więc dekompozycję wektora $\mathbf{x}_{it}$ na dwa podzbiory: zmiennych nieskorelowanych z α_i, i zmiennych skorelowanych z α_i, oraz odpowiednią modyfikację macierzy instrumentów. Dalsze postępowanie polega na zastosowaniu Uogólnionej Metody Momentów (GMM). Estymator wektora parametrów strukturalnych $[\gamma\ \beta^T]^T$ modelu (1) ma postać:

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix}_{GMM} = \left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\Delta \mathbf{y}_{i,-1}^T\right)^* \mathbf{Z}_i\right)\mathbf{W}_N\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\left(\Delta \mathbf{y}_{i,-1}\right)^*\right)\right]^{-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\Delta \mathbf{y}_{i,-1}^T\right)^* \mathbf{Z}_i\right)\mathbf{W}_N\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\left(\Delta \mathbf{y}_{i,-1}\right)^*\right)\right], \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{W}_N$ jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą wag, a macierz $\mathbf{Z}_i$ jest określona w zależności od charakteru zmiennych $\mathbf{x}_{it}$, wzorem (3) lub (5). Nazywany jest on estymatorem GMM pierwszych różnic (FDGMM). Zastosowanie (6) w praktyce wymaga wcześniejszej estymacji macierzy wag. Estymator dwustopniowy wektora $\left[\hat{\gamma}\ \ \hat{\beta}\right]^T_{GMM2}$, (FDGMM2) uzyskuje się, zastępując we wzorze (6) macierz $\mathbf{W}_N$ jej zgodnym i asymptotycznie efektywnym estymatorem postaci ogólnej:

$$\hat{\mathbf{W}}_N^{opt} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\,\Delta\hat{\varepsilon}_i\,\Delta\hat{\varepsilon}_i^T\,\mathbf{Z}_i\right)^{-1}. \tag{7}$$

$\Delta\hat{\varepsilon}_i$ oznacza wektor reszt pewnego początkowego estymatora $\left[\hat{\gamma}\ \ \hat{\beta}\right]^T_{GMM1}$ wektora $[\gamma\ \beta^T]^T$. Estymator (7) wyznacza się stosując procedurą iteracyjną, zaś estymator $\left[\hat{\gamma}\ \ \hat{\beta}\right]^T_{GMM1}$ uzyskuje się zgodnie ze wzorem (6) dla początkowej macierzy wag $\mathbf{W}_{N1}$. Estymator $\left[\hat{\gamma}\ \ \hat{\beta}\right]^T_{GMM1}$ nazywa się jednostopniowym estymatorem GMM pierwszych różnic (FDGMM1). Jako początkową macierz wag przyjąć można $\mathbf{W}_{N1} = \mathbf{I}$, lub zgodnie z propozycją Arellano i Bonda:

$$\mathbf{W}_{N1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\mathbf{G}\mathbf{Z}_i,\ \text{gdzie:}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz wariancji-kowariancji estymatora (6) jest w ogólnym przypadku dana wzorem:

$$p\lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta\mathbf{y}_{i,-1}^T\mathbf{Z}_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\,\Delta\varepsilon_i\,\Delta\varepsilon_i^T\,\mathbf{Z}_i\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{Z}_i^T\,\Delta\mathbf{y}_{i,-1}\right)\right]^{-1}, \tag{8}$$

a przy dodatkowych założeniach dotyczących normalności rozkładu i sferyczności ε_{it} jej środkowy czynnik redukuje się do $\sigma_\varepsilon^2\tilde{\mathbf{W}}_N^{opt}$.

Możliwość zastosowania FDGMM jest problematyczna w przypadku, kiedy opóźnione poziomy zmiennych są słabymi instrumentami dla zmiennych zróżnicowanych (tzn. zmienne instrumentalne są zbyt słabo skorelowane ze zmienną objaśniającą). Sytuacja taka ma miejsce między innymi wtedy, gdy liczba obserwacji w czasie jest mała i wykorzystuje się szeregi czasowe o wysokim stopniu trwałości[4] (ang. *persistent*

[4] Wydaje się, że pojęcie to funkcjonuje w literaturze anglojęzycznej wyłącznie w kontekście panelowych modeli dynamicznych, gdzie definiowane jest jako proces, którego wartości przyszłe są silnie skorelowane z wartościami bieżącymi (*a highly persistent process is a time series process where outcomes in the distant future are highly correlated with current outcomes*). Jest ono ściśle związane z pojęciem niestacjonarności: szereg, który posiada pierwiastek jednostkowy jest definiowany jako szereg o wysokim stopniu trwałości, dla którego wartość bieżąca równa jest wartości z okresu poprzedniego plus składnik losowy (*a unit root*

time series). Estymatory FDGMM mogą być wówczas silnie obciążone. Szczegółowe rozważania na temat obciążenia estymatorów, spowodowanego zastosowaniem słabych instrumentów znaleźć można m.in. w pracy [20].

Systemowy estymator GMM (SGMM) Blundella i Bonda wykorzystuje dodatkowe warunki momentów, które są właściwe również w sytuacji, gdy instrumenty FDGMM są słabe, oraz założenia odnośnie warunków początkowych, umożliwiające uzyskanie warunków momentów, które są właściwe również dla szeregów o wysokim stopniu trwałości. Zasadnicza idea SGMM polega na oszacowaniu systemu równań zarówno na przyrostach, jak i na poziomach. Instrumentami dla zmiennych objaśniających w równaniach na poziomach są opóźnione pierwsze różnice zmiennych. Instrumenty te są właściwe, jeśli model (1), oprócz założeń przyjętych w [5], spełnia założenie dotyczące wartości początkowej, postaci: $E\left[\left(y_{i1} - \frac{\alpha_i}{1-\gamma}\right)\alpha_i\right] = 0$. Jest to założenie dotyczące stacjonarności średniej[5] i wynika z niego warunek:

$$E(\alpha_i \ \Delta y_{i2}) = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Estymator SGMM dla modelu autoregresyjnego (tzn. modelu postaci (1), w którym $\beta = \mathbf{0}$), na którym koncentrują się rozważania Blundella i Bonda zawarte w [8] wykorzystuje dwa układy warunków momentów, postaci[6]:

$$\begin{cases} E\left(\mathbf{Z}_i^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i\right) = \mathbf{0} \\ E\left(\mathbf{Z}_i^{+T} \mathbf{u}_i^+\right) = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{10}$$

gdzie $\mathbf{u}_i^+ = [\Delta\varepsilon_{i3}, \ldots, \Delta\varepsilon_{iT}, u_{i3}, \ldots, u_{iT}]^T$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\Delta\varepsilon_{i2}, \ldots, \Delta\varepsilon_{iT}]$, a macierze instrumentów mają postać:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} [y_{i1}] & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ 0 & [y_{i1}, y_{i2}] & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ 0 & \ldots & \mathbf{0} & [y_{i1}, \ldots, y_{i,T-2}] \end{bmatrix}, \ \mathbf{Z}_i^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta y_{i2} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta y_{i3} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \Delta y_{i,T-1} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Jeśli $\beta \neq \mathbf{0}$, to postać macierzy zmiennych instrumentalnych zależy od charakteru zmiennych egzogenicznych, analogicznie jak w przypadku FDGMM. W przypadku, gdy zmienne $\mathbf{x}_{it}$ są ściśle egzogeniczne, to postępowanie jest takie samo jak w przypadku estymatora FDGMM. Jeśli zaś zmienne $\mathbf{x}_{it}$ nie są ściśle egzogeniczne, to przyjmując

process is a highly persistent time series process where the current value equals last period's value, plus a weakly dependent disturbance).

[5] Wyróżniamy dwa rodzaje niestacjonarności: w średniej (trend deterministyczny) i wariancji (trend stochastyczny) procesu.

[6] Pierwszy z układów określonych wzorem (10) to układ warunków momentów wykorzystywany w FDGMM. Drugi z nich tworzą dodatkowe warunki uzyskane dzięki spełnieniu warunku (9).

dla tych zmiennych założenie początkowe typu (9) można uzyskać dodatkowe warunki momentów postaci:

$$E(\Delta \mathbf{x}_{it-1}\mathbf{u}_{it}) = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, N \text{ oraz } t = 3, \ldots, T. \tag{12}$$

Zatem opóźnione pierwsze różnice $\Delta\mathbf{x}_{it-1}$ mogą być zmiennymi instrumentalnymi w równaniach na poziomach i zespół wszystkich możliwych warunków momentów tworzą warunki (4) i (12). Wykorzystując ten układ warunków do estymacji GMM systemu $(T-2)$ równań na przyrostach i $(T-2)$ równań na poziomach, uzyskuje się jednostopniowy i dwustopniowy estymator SGMM, analogicznie jak opisano to dla FDGMM.

W pracy [8] wykazano, że zastosowanie systemowego estymatora GMM przynosi znaczący wzrost efektywności w stosunku do FDGMM szczególnie, gdy wartość parametru autoregresyjnego $\gamma \to 1$ lub gdy stosunek wariancji $\sigma_\alpha^2/\sigma_\varepsilon^2$ rośnie.

Przy założeniu homoskedastyczności ε_{it} estymatory jednostopniowe FDGMM i SGMM są równoważne estymatorom dwustopniowym. Jeśli zaś ε_{it} jest heteroskedastyczny, to estymatory dwustopniowe są bardziej efektywne. Bond, Hoeffler i Temple w pracy [10] stwierdzają jednak, powołując się na eksperymenty Monte Carlo, że wzrost efektywności jest z reguły niewielki, oraz że estymator dwustopniowy zbiega do swojego rozkładu asymptotycznego dość powoli. W skończonych próbach błędy szacunku tego estymatora mogą ponadto być silnie obciążone w dół.

Przegląd metod estymacji pod kątem ich przydatności do estymacji jednorównaniowych modeli dynamicznych na podstawie mikropaneli zawarty jest w artykule [11]. Metody, które bazują na GMM są, według autora, szczególnie użyteczne w przypadku modeli zawierających endogeniczne lub z góry ustalone zmienne objaśniające. Endogeniczność zmiennych objaśniających jest zjawiskiem naturalnym: założenie o ścisłej ich egzogeniczności oznaczałoby, że przeszłe wartości zmiennych nie wpływają na wartości bieżące, co byłoby trudne do przyjęcia w przypadku zjawisk często modelowanych na podstawie mikropaneli, takich jak: konsumpcja, dochód, inwestycje, etc. Autor zwraca też uwagę na własności estymatorów w przypadku małych prób (jeśli dodatkowo wymiar przekrojowy próby jest niewielki), oraz warunków początkowych w kontekście mikropaneli. Wpływ obserwacji początkowej na każdą kolejną obserwację jest tu szczególnie istotny ze względu na krótkość szeregu czasowego. Ilustracją tych rozważań są dwa przykłady empiryczne, omówione w części 4.

Własności estymatorów bazujących na GMM w kontekście modeli dynamicznych szacowanych na podstawie makropaneli są rozważane w [10]. W przypadku tego typu danych, podobnie jak w przypadku mikropaneli, często pojawiającymi się problemami są endogeniczność i błędy pomiaru zmiennych, jak również konsekwencje wynikające z pominiętych zmiennych. Źródłem problemów w przypadku wykorzystania makropaneli może też być mała próba, oraz wysoki stopień trwałości szeregu. Rozważania są zilustrowane przykładem zastosowania estymatorów FDGMM i SGMM z alternatywnymi zbiorami instrumentów do szacowania modelu wzrostu PKB i konwergencji. Omówienie wyników estymacji tego modelu zawarte jest w części 5.

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA PANELOWYCH MODELI DYNAMICZNYCH W BADANIACH MIKROEKONOMICZNYCH

W artykule [11] Bond prezentuje przykłady zastosowania alternatywnych estymatorów do oszacowania parametrów dwóch modeli: autoregresyjnego modelu stopy inwestycji dla firm brytyjskich, oraz modelu produkcji dla firm z USA.

Model stopy inwestycji jest szacowany na podstawie 4966 obserwacji, pochodzących z 703 firm, dla których dostępne były dane roczne za co najmniej 4 kolejne lata w okresie 1988-2000. Model ma postać:

$$\left(\frac{I_{it}}{K_{it}}\right) = c_t + \gamma\left(\frac{I_{i,t-1}}{K_{i,t-1}}\right) + (\alpha_i + \varepsilon_{it}), \tag{13}$$

gdzie I_{it} oznacza wydatki inwestycyjne brutto, K_{it} – kapitał akcyjny netto i koszt odtworzenia. Stosunek I_{it}/K_{it} jest zatem przybliżoną miarą stopy wzrostu kapitału akcyjnego netto plus stopy amortyzacji. Zmienność w czasie wyrazu wolnego c_t odzwierciedlać ma jednakowe dla wszystkich firm składowe stopy inwestycji, wynikające z cykliczności lub tendencji rozwojowej.

Do oszacowania modelu zastosowane zostały cztery alternatywne estymatory: KMNK, wewnątrzgrupowy (WG), 2MNK dla modelu pierwszych różnic i FDGMM. Wyniki prezentowane są w [11] w tabeli 1, na s. 31. Oceny parametru γ wahają się od –0,01 dla estymatora WG do 0,27 dla estymatora KMNK. Jest to duża rozbieżność, która potwierdza regułę, że w przypadku panelowych modeli dynamicznych estymator KMNK jest obciążony w górę, a WG – w dół.

Ocena parametru autoregresyjnego uzyskana na podstawie 2MNK wynosi 0,1626 z błędem szacunku 0,036. Estymator 2MNK dla modelu pierwszych różnic jest wyznaczony przy zastosowaniu zmiennej instrumentalnej $(I/K)_{i,t-2}$. Ponieważ model jest jednoznacznie identyfikowalny, nie można zastosować testu Sargana, zatem oceny jego jakości dokonać można na podstawie testu autokorelacji Arellano-Bonda[7]. Przy standardowym założeniu, że składniki losowe ε_{it} nie wykazują korelacji w czasie, w prawidłowo wyspecyfikowanym modelu należy się spodziewać, że przyrosty $\Delta\varepsilon_{it}$ będą wykazywały istotną ujemną korelację pierwszego rzędu i brak istotnej korelacji drugiego rzędu. Wynik testu Arellano-Bonda (tabela 1, s. 31) potwierdza prawidłową specyfikację modelu.

Kolejną metodą zastosowaną do estymacji modelu (13) jest jednostopniowa FDGMM. Autor prezentuje wyniki uzyskane dla dwóch różnych zbiorów instrumentów. W pierwszej wersji zbiór zmiennych instrumentalnych jest ograniczony do $(I/K)_{i,t-2}$ i $(I/K)_{i,t-3}$. Mimo tego, że w procesie estymacji nie wykorzystuje się pełnej macierzy $\mathbf{Z}_i$, danej wzorem (5), zauważalna jest pewna poprawa precyzji estymacji w stosunku do 2MNK (błąd szacunku spada z 0,0362 do 0,0327, przy ocenie parametru γ równej 0,1593). Poprawa wynikać może z wykorzystania dodatkowych warunków momentów.

[7] Test Arellano-Bonda bada występowanie autokorelacji drugiego rzędu składnika losowego $\Delta\varepsilon$ w modelu pierwszych różnic. Występowanie w modelu pierwszych różnic autokorelacji rzędu wyższego niż 1 oznaczałoby, że warunki momentów są niespełnione, a więc instrumenty użyte podczas estymacji GMM nie są właściwe. Hipoteza H_0 testu Arellano-Bonda głosi, że autokorelacja taka nie występuje (por. np. [5], [6]).

Autor odnotowuje, że macierz $\mathbf{Z}_i$ wykorzystana do 2MNK składa się z jednej kolumny (postaci $[(I/K)_{i1}\ (I/K)_{i2}\ \ldots\ (I/K)_{i,T-2}]^T$, a FDGMM, nawet w ograniczonej wersji, wykorzystuje macierz liczącą 23 kolumny. Model jest obecnie identyfikowalny z nadmiarem, zatem do oceny jego jakości zastosować można test Sargana warunków ponadidentyfikujących. Wartość statystyki s jest równa 23,84, a wyznaczone *p-value* = 0,36 oznacza, że warunki ponadidentyfikujące są właściwe, a więc model jest poprawny. Wynik testu Sargana potwierdzony jest wynikiem testu Arellano-Bonda.

Następnie jednostopniowa FDGMM zastosowana jest ponownie, z pełnym zbiorem zmiennych instrumentalnych, wynikających z założeń przyjętych w [5]. Macierz $\mathbf{Z}_i$ wykorzystywana w tym przypadku liczy aż 78 kolumn. Wykorzystanie dodatkowych warunków momentów przynosi dalszą poprawę precyzji estymacji. Ocena parametru γ wynosi obecnie 0,156, a błąd jego szacunku 0,0318. Testy Sargana i Arellano-Bonda potwierdzają hipotezę o poprawności modelu. Powodem, dla którego (oprócz FDGMM z pełnym zbiorem instrumentów) stosowana jest FDGMM z ograniczonym zbiorem instrumentów jest to, że estymatory GMM wyznaczane na podstawie zbyt wielu warunków momentów mogą być obciążone w małych próbach, a przyczyną tego obciążenia (ang. *overfitting bias*) może być właśnie nadmiar wykorzystanych warunków momentów. Porównanie obu estymatorów FDGMM pokazuje jednak, że w omawianym modelu ten problem nie wystąpił, co więcej utrata efektywności spowodowana przez pominięcie zmiennych instrumentalnych, którymi są bardziej odległe w czasie opóźnienia jest bardzo niewielka.

Dodatkowo model (13) estymowany został za pomocą dwustopniowej FDGMM z pełnym zbiorem instrumentów. Wyznaczona za pomocą tej metody ocena parametru γ wynosi 0,1806. Błąd szacunku tego parametru szacowany jest dwoma metodami. Błąd asymptotyczny obliczony według wzoru (8) ma wartość 0,0227, a więc jest o około 30% mniejszy niż błąd estymatora jednostopniowego, przy zbliżonych wartościach ocen parametru. Autor stwierdza, że tak duży wzrost efektywności estymacji w wyniku zastosowania estymatora dwustopniowego jest nieuzasadniony i nigdy nie był odnotowany w symulacjach. Błąd obliczony przy zastosowaniu korekty Windmeijera[8], jest równy 0,0314, więc jest praktycznie taki sam, jak błąd estymatora jednostopniowego z pełnym zbiorem instrumentów. Rezultat ten potwierdza udowodnioną w literaturze tezę (por. np. [12]), że praktyczne wnioskowanie na asymptotycznej macierzy wariancji-kowariancji dwustopniowego estymatora GMM jest ryzykowne.

Innym przykładem zastosowania panelowego modelu dynamicznego w badaniach mikroekonomicznych jest dynamiczna specyfikacja funkcji produkcji, estymowana przez Blundella i Bonda w [9]. Przykład ten pokazuje dlaczego specyfikacja dynamiczna może być konieczna dla zapewnienia identyfikowalności pewnych parametrów, mimo że dynamika jako taka nie jest centralnym punktem analizy. Punktem wyjścia jest funkcja produkcji Cobba-Douglasa, postaci:

[8] Windmeijer w pracy [21] wykazał, że zasadniczą przyczyną obciążenia dwustopniowego estymatora GMM w małych próbach jest obecność początkowych estymatorów parametrów strukturalnych w macierzy wag. Udowodnił on też, że wielkość tego obciążenia można estymować, oraz podał wzór według którego można wyznaczyć korektę estymatorów wariancji parametrów, zwaną w późniejszych opracowaniach korektą Windmeijera.

$$\begin{aligned} & y_{it} = \beta_n n_{it} + \beta_k k_{it} + \lambda_t + (\alpha_i + \varepsilon_{it} + m_{it}) \\ & \varepsilon_{it} = \gamma\varepsilon_{i,t-1} + e_{it} \qquad |\gamma| < 1 \\ & e_{it},\ m_{it} \sim MA(0) \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie y_{it}, n_{it}, k_{it} oznaczają kolejno logarytmy: sprzedaży, zatrudnienia i kapitału akcyjnego firmy i w roku t, λ_t jest specyficznym dla danego roku wyrazem wolnym (jednakowym dla wszystkich firm), odzwierciedlającym postęp technologiczny, β_n, β_k, γ są parametrami. Składowe składnika losowego to: efekt grupowy α_i, potencjalnie autoregresyjny „właściwy" składnik losowy ε_{it}, oraz składowa m_{it}, odzwierciedlająca błędy pomiaru, o której zakłada się, że nie wykazuje autokorelacji. Zakłada się, że zatrudnienie i kapitał są skorelowane z efektami grupowymi α_i, oraz z pozostałymi dwiema składowymi składnika losowego (e_{it} i m_{it}). Przy tych założeniach nie można wskazać właściwych warunków momentów dla modelu statycznego, postaci (14), o ile składnik losowy ε_{it} rzeczywiście jest autoregresyjny, to znaczy $\gamma \neq 0$. Model (14) zapisać można jednak równoważnie w postaci:

$$\begin{aligned} y_{it} = {} & \beta_n n_{it} - \gamma\beta_n n_{i,t-1} + \beta_k k_{it} - \gamma\beta_k k_{i,t-1} + \gamma y_{i,t-1} + \\ & + (\lambda_t - \gamma\lambda_{t-1}) + \big(\alpha_i(1-\gamma) + e_{it} + m_{it} - \gamma m_{i,t-1}\big) \end{aligned}, \tag{15}$$

lub w postaci:

$$y_{it} = \pi_1 n_{it} + \pi_2 n_{i,t-1} + \pi_3 k_{it} + \pi_4 k_{i,t-1} + \pi_5 y_{i,t-1} + \lambda_t^* + \big(\alpha_i^* + w_{it}\big), \tag{16}$$

z dwoma nieliniowymi restrykcjami wspólnego czynnika: $\pi_2 = -\pi_1\pi_5$ i $\pi_4 = -\pi_3\pi_5$. Ponieważ składnik losowy ($\varepsilon_{it} + m_{it}$) modelu (14) wykazuje autokorelację to możliwe są dwa przypadki: (a) nie występują błędy pomiaru, to znaczy $w_{it} = e_{it}$, oraz $\mathrm{var}(m_{it}) = 0$, to składnik losowy w_{it} modelu (16) nie wykazuje autokorelacji, lub (b) jeśli w niektórych szeregach występują niesystematyczne (ang. *transient*) błędy pomiaru, to $w_{it} \sim MA(1)$. W każdym z tych dwóch przypadków możliwe jest uzyskanie zgodnych estymatorów wektora parametrów $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \ \dots \ \pi_5]$ za pomocą GMM. Po wyznaczeniu zgodnych estymatorów wektora $\boldsymbol{\pi}$ i wariancji $\mathrm{var}(\boldsymbol{\pi})$, możliwe jest nałożenie i testowanie restrykcji wspólnego czynnika, postulowanych w modelu (16) i wyznaczenie zgodnych estymatorów parametrów β_n, β_k, γ.

W pracy [9] oszacowano parametry modelu (14) na podstawie zrównoważonego panelu danych z 509 firm prowadzących działalność badawczo-rozwojową w USA w latach 1982-1989. Kapitał akcyjny i zatrudnienie było mierzone na koniec roku rozrachunkowego w danej firmie.

Szeregi obserwacji na zmiennych y_{it}, n_{it}, k_{it} okazały się charakteryzować wysokim stopniem trwałości, co zostało wykazane poprzez konstrukcję i estymację modeli AR(1) dla tych zmiennych. Oceny MNK parametru autoregresyjnego prezentowane w [9] wynoszą dla wszystkich szeregów 0,99. Oceny wyznaczone na podstawie SGMM są niewiele niższe – od 0,92 do 0,96. Zaskakujące, zdaniem autorów jest, że ocena FDGMM parametru autoregresyjnego dla zmiennej n_{it} jest niemal identyczna (0,920) jak ocena SGMM (0,923). Dla pozostałych dwóch zmiennych potwierdzone zostało przypuszczenie, że w związku z wysokim stopniem trwałości szeregów oceny FDGMM są obciążone w dół – wynoszą one 0,768 dla zmiennej k_{it} i 0,775 dla y_{it}.

Autorzy prezentują wyniki estymacji modeli (14) i (16) wyznaczone na podstawie KMNK, WG, oraz jednostopniowych FDGMM i SGMM. Zgodnie z oczekiwaniami oceny parametru γ KMNK są obciążone w górę, a oceny WG – obciążone w dół. FDGMM stosowana jest dwukrotnie: z opóźnionymi o dwa okresy poziomami jako zmiennymi instrumentalnymi, oraz powtórnie z instrumentami, którymi są poziomy opóźnione o trzy okresy. Właściwość instrumentów w pierwszym przypadku została odrzucona przez test Sargana. Odrzucenie to wynika z występowania błędów pomiaru m_{it}. Instrumenty w drugim przypadku są właściwe, a restrykcje wspólnego czynnika spełnione. Jednakże oceny wszystkich parametrów (w tym parametru γ przy opóźnionej zmiennej objaśnianej) są zbliżone do ocen estymatora wewnątrzgrupowego, co sugeruje możliwość wystąpienia obciążenia wynikającego z małej próby i problemu słabych instrumentów.

Właściwość poziomów opóźnionych o trzy okresy jako instrumentów dla równań na przyrostach i przyrostów opóźnionych o dwa okresy, jako instrumentów dla równań na poziomach jest na granicy istotności w teście Sargana. Jednakże wynik różnicowego testu Sargana, badającego poprawność dodatkowych warunków momentów, uzyskanych dzięki wprowadzeniu instrumentów dla równań na poziomach, potwierdza właściwość tych instrumentów na poziomie istotności 0,1. Ponadto o poprawności SGMM świadczy to, że ocena parametru γ uzyskana tą metodą jest wyższa niż ocena FDGMM i niższa niż ocena KMNK. Restrykcje wspólnego czynnika są również spełnione. Dlatego autorzy [9] uznają estymator SGMM za najwłaściwszy dla rozważanego modelu.

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA PANELOWYCH MODELI DYNAMICZNYCH W BADANIACH MAKROEKONOMICZNYCH (MODELOWANIU WZROSTU)

Wzmożone zainteresowanie konstrukcją i wynikami estymacji modeli wzrostu i konwergencji datuje się od początku lat 90. XX wieku, a jako przykłady znaczących prac z tego zakresu wymienić można prace [7] i [19]. Klasyczne modele wzrostu, oparte na pracy Solowa, zostały w późniejszych latach podważone przez modele bazujące na teorii wzrostu endogenicznego. Generalnie uważa się, że stwierdzenie występowania zjawiska konwergencji jest potwierdzeniem słuszności założeń Solowa, a stwierdzenie, że konwergencja nie występuje przemawia za poprawnością teorii wzrostu endogenicznego. Wspólną cechą badań empirycznych nad wzrostem gospodarczym, które bazują na danych przekrojowych jest założenie jednakowej zagregowanej funkcji produkcji dla wszystkich krajów. Do przyjęcia takiego założenia zmusza brak możliwości uwzględnienia w modelach danych przekrojowych niemierzalnych różnic między krajami. Jedną z pierwszych prac, które wykorzystują dane panelowe do estymacji dynamicznego modelu wzrostu jest praca [18]. Jak zauważa jej autor, wykorzystanie danych panelowych daje możliwość uwzględnienia wspomnianych różnic w procesie konstrukcji funkcji produkcji, poprzez wyodrębnienie efektów grupowych. Jednym z celów pracy [18] było porównanie wyników uzyskanych na podstawie danych panelowych z wynikami uzyskanymi na podstawie regresji przekrojowej, prezentowanych w [19]. Dlatego w obu pracach wykorzystano analogiczne trzy zbiory krajów (98, 75 i 22 kraje). Ponieważ konstrukcja panelu na podstawie danych rocznych nie eliminowałaby wpływu zakłóceń krótkookresowych, wykorzystano dane z okresów 5-letnich z lat 1960-1985. Estymacji dokonano czterema metodami: KMNK na podstawie danych przekrojowych, KMNK na podstawie danych panelowych (ang. *pooled regression*), metodą minimalnej odległości[9] (ang. *minimum distance*), na podstawie modelu z efektami nielosowymi (estymator WG). Wyniki uzyskane w [18] na podstawie modeli panelowych wskazują, że tempo konwergencji jest znacznie szybsze niż wyznaczone na podstawie regresji przekrojowej, a oszacowane wartości elastyczności produkcji względem kapitału – niższe i bardziej akceptowalne. Z punktu widzenia teorii wzrostu, wykorzystanie modeli panelowych daje możliwość wyodrębnienia wpływu różnic technologicznych i instytucjonalnych między krajami na wzrost gospodarczy i na proces konwergencji.

W świetle późniejszej wiedzy, a szczególnie prac [5] oraz [8], stwierdzić trzeba, że wyniki prezentowane w [18] są obciążone w górę, co jest skutkiem zastosowania estymatora WG do estymacji modelu dynamicznego. Istotnie, tempo konwergencji wyznaczone dla najmniejszej grupy krajów na podstawie estymatora WG, wynoszące aż 9% wydaje się zbyt szybkie. Ogólnie stwierdzić trzeba, że estymacja dynamicznych modeli wzrostu wymaga zastosowania właściwych metod, ze względu na występowanie problemów związanych z endogenicznością zmiennych objaśniających, błędami pomiaru zmiennych lub pominiętymi zmiennymi.

Autorami, którzy pierwsi zastosowali FDGMM do estymacji modelu wzrostu na podstawie panelowego modelu dynamicznego byli Caselli, Esquivel i Lefort (por. [13]. Jak zauważają Bond, Hoeffler i Temple w [10], wykorzystanie do estymacji modeli wzrostu danych panelowych i zastosowanie GMM ma przewagę nad regresją przekrojową i innymi metodami estymacji. Po pierwsze, dzięki wykorzystaniu danych panelowych można oszacować model na przyrostach, co pozwala uniknąć obciążenia estymatorów, wynikającego z pominięcia zmiennych objaśniających stałych w czasie (stanowią one składową efektu grupowego i są eliminowane podczas obliczania pierwszych różnic). W szczególności, w warunkowych równaniach konwergencji pominiętą zamienną może być początkowy poziom efektywności, który jest nieobserwowalny, a dodatkowo skorelowany z początkowym poziomem dochodu, będącym zazwyczaj jedną ze zmiennych objaśniających. Po drugie, zastosowanie zmiennych instrumentalnych pozwala na wyznaczenie zgodnych estymatorów parametrów w modelach, zawierających endogeniczne zmienne objaśniające, takie jak np. stopa inwestycji, a także w przypadku obecności błędów pomiaru zmiennych.

Bond, Hoeffler i Temple (por. [10], w dalszym ciągu BHT) zwracają uwagę na to, że zastosowanie FDGMM do estymacji modeli wzrostu może być niepoprawne, co jest związane z problemem słabych instrumentów. Dane dotyczące produkcji mają często cechy procesu o wysokim stopniu trwałości, a ponadto panelowe modele wzrostu estymowane są często na podstawie kilku obserwacji w czasie, które dodatkowo mogą być

[9] Metoda minimalnej odległości została opracowana przez Chamberlaina w pracy [14]. Zamiast eliminowania efektów grupowych α_i poprzez wyznaczenie pierwszych różnic, specyfikuje się α_i jako funkcję tych zmiennych, z którymi może ona być skorelowana.

średnimi z kilku lat. Te cechy powodują, że opóźnione poziomy zmiennych są słabymi instrumentami dla równań na przyrostach, co skutkuje obciążeniem estymatorów.

Model wzrostu Solowa, zastosowany przez BHT ma postać:

$$\Delta y_{it} = \alpha_{0t} + (\gamma - 1)y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}^T\beta + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \text{ dla } i = 1, \ldots, N, \; t = 2, \ldots, T \tag{17}$$

gdzie: Δy_{it} jest przyrostem logarytmu PKB *per capita* w okresie 5 lat, $y_{i,t-1}$ – logarytmem PKB *per capita* na początku tego okresu, a $\mathbf{x}_{it}$ – wektorem zmiennych objaśniających, mierzonych na początku lub podczas tego okresu, którymi mogą być: logarytm stopy inwestycji (s_{it}), logarytm stopy wzrostu populacji (n_{it}) plus 0,05, gdzie 0,05 reprezentuje sumę wspólnej dla wszystkich obiektów egzogenicznej stopy postępu technicznego (g) i wspólnej stopy deprecjacji (δ). W rozszerzonym modelu Solowa regresorami mogą też być miary jakości kapitału ludzkiego, na przykład logarytm wskaźnika skolaryzacji (enr_{it}) dla szkół średnich (stosunku liczby uczniów tych szkół do liczby ludności w wieku odpowiadającym ustawowemu okresowi pobierania nauki na tym poziomie edukacji). Nieobserwowalny efekt grupowy α_i odzwierciedla między innymi różnice początkowego poziomu efektywności, zaś zmieniający się w czasie wyraz wolny (efekt czasowy α_{0t}) odzwierciedla jednakowe dla wszystkich obiektów zmiany produktywności.

BHT reestymowali za pomocą SGMM model, który oszacowany został oryginalnie w pracy [13] za pomocą FDGMM, na podstawie danych z okresów 5-letnich z lat 1960-1985. Model (17) można oczywiście zapisać równoważnie w postaci:

$$y_{it} = \alpha_{0t} + \gamma y_{i,t-1} + \mathbf{x}_{it}^T\beta + \alpha_i + \varepsilon_{it}, \text{ dla } i = 1, \ldots, N, \; t = 2, \ldots, T \tag{18}$$

Spełnienie dodatkowych warunków momentów, wymaganych dla zastosowania SGMM jest zagwarantowane, jeśli średnie po czasie wszystkich zmiennych (objaśnianej i objaśniających) są stałe dla każdego obiektu. Zostało to pokazane w pracy [9] dla funkcji produkcji. BHT zauważają, że o ile stałość średnich dla stopy inwestycji i stopy wzrostu populacji jest zgodna z postulatami modelu wzrostu Solowa, to stałość średniej wartości PKB *per capita* jest problematyczna. Jednakże włączenie do modelu efektów czasowych α_{0t} pozwala na założenie, że długookresowy wzrost PKB *per capita*, oraz postęp techniczny są jednakowe dla wszystkich krajów. Założenie dotyczące jednakowego postępu technicznego zostało przyjęte w pracy [19] i jest odtąd standardowo przyjmowane w modelach wzrostu.

BHT podkreślają, że włączenie efektów czasowych do modelu (17) jest równoważne przekształceniu zmiennych w ich odchylenia od średnich grupowych, czyli ich transformacji za pomocą operatora wewnątrzgrupowego. W estymowanym przez nich modelu, tak samo jak w pracy [13], zmienne zostały przekształcone w odchylenia od średnich, co umożliwia porównywalność wyników, oraz pominięcie efektów czasowych. Wyniki prezentowane przez autorów uzyskane są na podstawie estymatorów jednostopniowych FDGMM i SGMM ze średnimi błędami szacunku odpornymi na występowanie heteroskedastyczności.

Podstawowy model, postaci (17), w którym elementami wektora $\mathbf{x}_{it}$ są $\ln(s_{it})$ i $\ln(n_{it} + g + \delta)$, szacowany jest czterema metodami: MNK, WG, FDGMM, SGMM. Stopa inwestycji i stopa wzrostu populacji zostały uznane za zmienne endogeniczne, co przy zastosowaniu dwóch ostatnich metod znalazło odzwierciedlenie w zastąpieniu ich zmiennymi instrumentalnymi. Szczegółowe wyniki zawarte są w pracy BHT w tabeli 1 na s. 31. Instrumentami w modelu pierwszych różnic, wykorzystanymi w FDGMM są dla odpowiednich zmiennych: $\ln(y_{i,t-2})$, $\ln(s_{i,t-2})$, $\ln(n_{i,t-2} + g + \delta)$, oraz wcześniejsze opóźnienia. Dodatkowymi instrumentami w równaniach na poziomach, wykorzystanymi w SGMM są dla odpowiednich zmiennych: $\Delta\ln(y_{i,t-1})$, $\Delta\ln(s_{i,t-1})$, $\Delta\ln(n_{i,t-1} + g + \delta)$. Wśród najważniejszych wniosków wymienić należy to, że ocena FDGMM parametru przy dochodzie początkowym $y_{i,t-1}$, równa –0,537 jest niższa niż ocena WG (–0,031), co wskazuje na jej obciążenie w dół, właściwe dla małej próby. Ponadto, odpowiadająca jej ocena tempa konwergencji $\hat{\beta} = 0{,}6$, jest znacznie wyższa niż uzyskana innymi metodami. SGMM daje ocenę parametru przy dochodzie początkowym równą –0,101, przy czym jest to wartość znajdująca się pomiędzy oceną WG i MNK. Wynikająca stąd ocena tempa konwergencji $\hat{\beta} = 0{,}021$ wydaje się znacznie sensowniejsza, oznacza bowiem, że stopa konwergencji wynosi 2%. Wyniki testu Sargana i różnicowego testu Sargana wskazują na właściwość użytych instrumentów i poprawność dodatkowych warunków momentów, wykorzystanych przez SGMM. Zauważalne jest też zmniejszenie błędów szacunku estymatorów SGMM w stosunku do FDGMM. Traktowanie stopy inwestycji i stopy wzrostu populacji jako potencjalnych zmiennych endogenicznych umożliwia uwzględnienie zmiennego w czasie, to znaczy niesystematycznego błędu pomiaru każdej z nich. Przy założeniu występowania niesystematycznego błędu pomiaru PKB *per capita* zarówno poziom tej zmiennej z okresu $t-2$ w równaniu na przyrostach, jak i przyrost z okresu $t-1$ w równaniu na poziomach nie są właściwymi instrumentami. Mimo że testy Sargana nie wykazały niewłaściwości instrumentów użytych w SGMM, BHT ponownie zastosowali SGMM z wyłączeniem wymienionych zmiennych instrumentalnych. Dokładniej, $\ln(y_{i,t-2})$ została pominięta w zbiorze instrumentów dla modelu pierwszych różnic, a $\Delta\ln(y_{i,t-1})$ – zastąpiona przez $\Delta\ln(y_{i,t-2})$ w równaniach na poziomach. Wyniki, również prezentowane przez autorów w tabeli 1, różnią się bardzo nieznacznie od uzyskanych w podstawowej wersji SGMM. Wydaje się to wskazywać na brak problemów z błędami pomiaru PKB *per capita*. Oprócz wspomnianego już określenia stopy konwergencji na poziomie 2%, oceny SGMM wskazują na istotny, pozytywny wpływ stopy inwestycji (ok. 0,19) na poziom PKB *per capita* właściwy dla stanu wzrostu zrównoważonego (ang. *steady state*) i to, co podkreślają autorzy, przy uwzględnieniu efektów grupowych i możliwej endogeniczności inwestycji.

BHT rozważają też model rozszerzony, w którym do zbioru zmiennych objaśniających dołączono wskaźnik skolaryzacji dla szkół średnich. Wyniki są prezentowane przez autorów w tabeli 2 na s. 32. Dodanie tej zmiennej poprawiło nieco jakość estymatora FDGMM – ocena parametru przy dochodzie początkowym jest porównywalna z oceną WG (–0,331 i –0,321). Wiadomo jednak, że estymator WG w małych próbach jest, w przypadku modeli dynamicznych, obciążony ponadto tempo konwergencji, obliczone na podstawie tych ocen wynosiłoby aż 0,08. Bardziej poprawne wyniki uzyskano na podstawie SGMM – stopa konwergencji wyznaczona z modelu uwzględniającego wpływ wskaźnika skolaryzacji wynosi 1,7%, jednakże błąd szacunku parametru przy tej zmiennej (–0,046) przekracza wartość oceny tego parametru (–0,018). BHT sugerują nieuwzględnianie wskaźnika skolaryzacji bezpośrednio w modelu, ale raczej dołączenie opóźnionych wartości tej zmiennej do zbioru instrumentów, wykorzystywanych w FDGMM, w celu rozwiązania problemu słabych instrumentów. Rezultaty przedstawione są w tabeli 3 na s. 33. Dokładniej, zbiór instrumentów dla równań na przyrostach podstawowego modelu Solowa, został rozszerzony o $\ln(enr_{i,t-1})$ oraz wcześniejsze opóźnienia. W ten sposób uzyskane oceny FDGMM są bliskie ocenom SGMM. Opóźniony wskaźnik skolaryzacji pomaga zatem przewidywać wzrost PKB *per capita* w równaniach postaci zredukowanej, podczas gdy bieżące wartości tej zmiennej nie wpływają na właściwy dla stanu wzrostu zrównoważonego poziom PKB *per capita* w rozważanym modelu. BHT interpretują ten rezultat jako oddziaływanie wskaźnika skolaryzacji na wzrost gospodarczy za pośrednictwem stopy inwestycji.

6. ZAKOŃCZENIE

W prezentowanym artykule przedstawiono możliwości zastosowania panelowych modeli dynamicznych w badaniach ekonomicznych. Zaprezentowano też zarys dwóch alternatywnych metod estymacji takich modeli, mających, jak się wydaje, najszersze zastosowanie praktyczne. Analiza prezentowanych przykładów empirycznych konstrukcji i estymacji modeli mikro- i makroekonometrycznych, przy zastosowaniu alternatywnych metod, ilustruje znaczenie doboru odpowiedniej metody estymacji dla prawidłowości wnioskowania ekonomicznego.

Uniwersytet Łódzki

LITERATURA

[1] Ahn S.C., Schmidt P., [1995], *Efficient estimation of models for dynamic panel data*, „Journal of Econometrics", 68, s. 5-28.

[2] Anderson, T.W., Hsiao C., [1981], *Estimation of Dynamic models with Error Components*, „Journal of the American Statistical Association", 76, 598-606.

[3] Anderson T.W., Hsiao C., [1982], *Formulation and estimation of dynamic models using panel data*, „Journal of Econometrics", 18, 47-82.

[4] Arellano M., Bover O., [1995], *Another look at the instrumental variable estimation of error –components models*, „Journal of Econometrics", Vol. 68, s. 29-52.

[5] Arellano M., Bond S., [1991], *Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations*, „Review of Economic Studies", Vol. 58, s. 277-297.

[6] Baltagi B., [2008], *Econometric Analysis of Panel Data*, 4th edn. Wiley, Chichester.

[7] Barro R.J., Sala-i-Martin X., [1992], *Convergence*, „Journal of Political Economy", Vol. 100, s. 223-251.

[8] Blundell R., Bond S., [1998], *Initial conditions and moment restrictions i dynamic panel data models*, „Journal of Econometrics", Vol. 87(1), s. 115-143.

[9] Blundell R., Bond S., [2000], *GMM estimation with persistent panel data: an application to production functions*, „Econometric Reviews", Vol. 19, s. 321-340.

[10] Bond S., Hoeffler A., Temple J., [2001], *GMM estimation of empirical growth models*, CEPR discussion paper, 3048, Centre for Economic Policy Research, London, United Kingdom.

[11] Bond S., [2002], *Dynamic panel data models: a guide to micro data methods and practice*, Centre for microdata and practice (CEMMAP), working paper CWP09/02.

[12] Bond S., Windmeijer F. [2005], *Reliable inference for GMM estimators? Finite sample properties of alternative test procedures in linear panel data models*, „Econometric Reviews", Vol. 24(1), s. 1-37.

[13] Caselli F., Esquivel G., Lefort F. [1996], *Reopening the convergence debate: anew look at cross-country growth empirics*, „Journal of Economic Growth", Vol. 1, s. 363-389.
[14] Chamberlain G., [1982], *Multivariate Regression Models for Panel Data*, „Journal of Econometrics", Vol. 18, s. 5-46.
[15] Dańska-Borsiak B., [2008], *Wybrane zagadnienia stosowalności Uogólnionej Metody Momentów dla modeli klasycznych i panelowych*, „Przegląd Statystyczny", tom 55(3), s. 47-60.
[16] Hausman J.A., Taylor W.E., [1981], *Panel data and unobservable individual effects*, „Econometrica", Vol. 49, 1377-1398.
[17] Hsiao C., [2003], *Analysis of Panel Data*, 2nd edn. Cambridge, Cambridge University Press.
[18] Islam N., [1995], *Growth empirics: a panel data approach*, „Quarterly Journal of Economics", Vol. 110(4), s. 1127-1170.
[19] Mankiw N., Romer D., Weil D., [1992], *A contribution to the empirics of economic growth*, „Quarterly Journal of Economics", Vol. 107(2), s. 407-437.
[20] Staiger D., Stock J., [1997], *Instrumental variables regression with weak instruments*, „Econometrica", Vol. 65, 557-586.
[21] Windmeijer F., [2005], *A finite sample correction for the variance of linear efficient two-step GMM estimators*, „Journal of Econometrics", Vol. 126, s. 25-51.

Praca wpłynęła do redakcji w marcu 2009 r.

ZASTOSOWANIA PANELOWYCH MODELI DYNAMICZNYCH W BADANIACH MIKROEKONOMICZNYCH I MAKROEKONOMICZNYCH

Streszczenie

Modele ekonometryczne szacowane na podstawie danych panelowych, w których zakłada się, że na kształtowanie się zmiennej objaśnianej wpływają, oprócz zmiennych objaśniających, niemierzalne, stałe w czasie i specyficzne dla danego obiektu czynniki, zwane efektami grupowymi, nazywane są modelami panelowymi (ang. *panel data models*). Stałość w czasie efektów grupowych jest przyczyną komplikacji metodologicznych, pojawiających się przy estymacji modeli dynamicznych. W artykule prezentowana jest zasadnicza idea dwóch najczęściej stosowanych metod estymacji takich modeli, bazujących na Uogólnionej Metodzie Momentów (GMM). Głównym celem artykułu jest przedstawienie przykładów zastosowania panelowych modeli dynamicznych w analizach ekonomicznych w skali mikro i makro. Szczególny nacisk położony został przy tym na wskazanie czynników, różnicujących te dwa przypadki i konsekwencje zastosowania różnych metod estymacji w zależności od rodzaju próby.

Słowa kluczowe: model dynamiczny, dane panelowe, GMM Pierwszych Różnic, Systemowa GMM, metody estymacji, model wzrostu, model produkcji

DYNAMIC PANEL DATA MODELS IN MICROECONOMIC AND MACROECONOMIC RESEARCH

Summary

Econometric models based on panel data, in which the presence of unobservable, constant over time, group-specific effects is assumed are called panel data models. The constancy over time of the group effects causes some methodological complications in the case of dynamic models. In this paper the main ideas of the two methods, which are most often used for estimation of dynamic panel data models are presented. The methods are: first-differenced GMM and system GMM. The main goal of this paper is to present some examples of applications of dynamic panel data models in micro and macroeconomic analyses. Special interest is in showing the consequences of using different methods according to the type of data – macro or micro.

Key words: dynamic model, panel data, first differenced GMM, system GMM, estimation methods, the growth model, production model.