PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVII – ZESZYT 4 – 2010

ZBIGNIEW ŚWITALSKI

RÓWNOWAGI NA RYNKACH Z DWUSTRONNYMI PREFERENCJAMI

1. WSTĘP

W 1962 roku Gale i Shapley w pracy [5] przedstawili pewien prosty model rekrutacji kandydatów do szkół. W modelu tym poszukuje się tzw. skojarzeń stabilnych tzn. przydziałów[1] kandydatów do szkół takich, że żadna para (kandydat, szkoła) nie ma motywacji do zmiany istniejącego przydziału (zob. def. 3.1). Skojarzenia stabilne mogą być zdefiniowane w tym modelu dzięki przyjęciu założenia o dwustronnych preferencjach w układzie kandydaci-szkoły, tzn. założenia, że każdy kandydat posiada preferencje w zbiorze szkół (na przykład umie uporządkować wszystkie szkoły w kolejności od najlepszej do najgorszej), a każda szkoła posiada preferencje w zbiorze kandydatów.

Model Gale'a-Shapleya może być traktowany jako pewien model rynku, na którym kandydaci występują w roli „kupujących", szkoły – w roli „sprzedających", a dobra którymi się „handluje", to miejsca w szkołach. W literaturze ekonomicznej opisano wiele innych rynków, które mają strukturę podobną do struktury wyżej opisanego rynku „szkolnego" (zob. [9]). Są to tzw. rynki z dwustronnymi preferencjami, a jako szczególnie ważny przykład może być tutaj wymieniony rynek pracy (zob. [3], [6]). Badania takich rynków nie ograniczały się jedynie do badań teoretycznych. Przeprowadzono wiele badań empirycznych dotyczących funkcjonujących w praktyce systemów kojarzenia (np. systemów rekrutacji stażystów i lekarzy do szpitali w USA i Wielkiej Brytanii, zob. [8]). Prowadzi się również intensywne badania eksperymentalne związane z zachowaniem się uczestników takich systemów – na przykład ze sposobem, w jaki określają oni swoje preferencje (zob. np. [2], [7]).

W badaniu rynków z dwustronnymi preferencjami, opisywanych za pomocą modelu Gale'a-Shapleya, wykorzystuje się głównie pojęcie skojarzenia stabilnego, które może być traktowane jako pewien rodzaj stanu równowagi na takim rynku (zob. komentarze po def. 3.1). Ze względu na brak wyraźnie określonych cen dóbr oferowanych na takim rynku, nie korzysta się natomiast tutaj z klasycznego pojęcia równowagi rynkowej. Zauważmy jednak, że (na przykład) na rynku „szkolnym" rolę cen mogłyby odgrywać minimalne liczby punktów niezbędne do dostania się do danej szkoły. Przypuśćmy, że szkoła wyższa określa minimalną liczbę punktów z kilku przedmiotów maturalnych, gwarantującą dostanie się na dany kierunek. Wówczas kandydat, który posiada odpowiednią liczbę punktów, składając podanie do tej szkoły, jak gdyby „płaci" tą liczbą

[1] Gale i Shapley w [5] użyli terminu *assignment*, który tradycyjnie w polskiej literaturze optymalizacyjnej tłumaczy się jako *przydział*.

punktów za miejsce na tym kierunku, a szkoła, przyjmując go, „sprzedaje" mu to miejsce.

W rzeczywistości systemy rekrutacji funkcjonują inaczej, gdyż dopiero po przyjęciu kandydatów możemy określić tą minimalną liczbę punktów (jako liczbę punktów, którą posiadał najgorszy z przyjętych kandydatów, przy założeniu, że wszystkie miejsca zostały „obsadzone"). Podana wyżej interpretacja pokazuje jednak, że możliwe jest określenie pewnej liczby, która odpowiada cenie dobra na tradycyjnym rynku. Możliwe jest, w związku z tym, określenie równowagi rynkowej dla rynku „szkolnego" i innych podobnych rynków (zob. def. 4.3), a więc można zastanawiać się nad związkiem tak określonej równowagi z pojęciem skojarzenia stabilnego.

Warto zwrócić uwagę, że w ostatnich latach pojawiło się wiele prac (np. [1], [10]), których autorzy badają związki między skojarzeniami stabilnymi, a równowagami rynkowymi w tzw. modelach Shapleya-Shubika (jest to pewien dyskretny model kojarzenia różny od modelu Gale'a-Shapleya). W modelach tych (w przeciwieństwie do modeli typu Gale'a-Shapleya) przyjmuje się, że preferencje kupujących zależą od cen towarów oferowanych przez sprzedających. Nie ma natomiast opracowań, w których zależności między skojarzeniami stabilnymi, a równowagami rynkowymi byłyby badane dla modeli typu Gale'a-Shapleya.

Celem artykułu jest wprowadzenie precyzyjnej, formalnej definicji stanu równowagi rynkowej w modelu Gale'a-Shapleya (ogólnie: na rynku z dwustronnymi preferencjami) oraz podanie związków między tak określoną równowagą rynkową, a skojarzeniem stabilnym. Równowaga rynkowa zostanie zdefiniowana w sposób możliwie ogólny, za pomocą pewnego układu warunków, których spełnienie gwarantuje kupującym otrzymanie towarów oferowanych przez sprzedających (zob. rozdz. 4). Takie ogólne podejście umożliwia wprowadzenie pojęcia równowagi nawet w sytuacji, gdy na danym rynku nie da się w naturalny sposób wprowadzić wielkości, które mogłyby spełniać rolę cen.

Zawartość poszczególnych rozdziałów, główne tezy oraz źródła pracy są następujące.W rozdziale 2 został przedstawiony klasyczny model rynku wzorowany na modelu Gale'a-Shapleya ([5], [9]) oraz zostały opisane dwa uproszczone modele rynków służące jako ilustracja przedstawionej teorii (model w przykładzie 2.1 jest znanym modelem Gale'a-Shapleya [5], model w przykładzie 2.2 jest oryginalny). W rozdziale 3 została wprowadzona klasyczna definicja stabilności [5]. W rozdziale 4 zostało wprowadzone ogólne pojęcie równowagi w modelu G-S zaczerpnięte z pracy [12]. W rozdziale 5 zostały zdefiniowane tzw. rozszerzenia poprawiające oraz sformułowano twierdzenie (zaczerpnięte z [12]) o wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między skojarzeniami stabilnymi, a tzw. równowagami stabilnymi. Rozdziały 6 i 7 zawierają niepublikowaną dotąd teorię tzw. równowag porządkowych, a w szczególności twierdzenie 7.1 o wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości między skojarzeniami stabilnymi, a tzw. równowagami brzegowymi. Rozdział 8 zawiera przykłady ilustrujące omawianą teorię.

2. MODEL RYNKU Z DWUSTRONNYMI PREFERENCJAMI

Będziemy posługiwali się bardzo uproszczonym modelem rynku, w którym występują skończone zbiory kupujących i sprzedających, skończona liczba niepodzielnych towarów, a także preferencje kupujących i sprzedających (kupujący mają preferencje w zbiorze sprzedających, a sprzedający – preferencje w zbiorze kupujących). W przykładach 2.1 i 2.2 nieco konkretyzujemy ten model, chociaż, ze względu na cel pracy, nie będziemy zajmowali się szczegółowym opisem faktycznie funkcjonujących rynków (ani rynku „szkolnego", ani rynku nieruchomości). Opisy i modele różnych rynków tego rodzaju znajdują się np. w [8] i [9].

Załóżmy, że dany jest skończony zbiór kupujących, oznaczony przez K i skończony zbiór sprzedających, oznaczony przez S. Każdy sprzedający $s \in S$ posiada q_s ($q_s \geq 1$) niepodzielnych jednostek pewnego towaru, które może sprzedać kupującym (różni sprzedający posiadają różne towary, natomiast każdy konkretny sprzedający posiada q_s identycznych egzemplarzy dokładnie jednego towaru). Każdy kupujący chce kupić dokładnie jedną jednostkę któregoś z towarów, a każdy sprzedający chciałby sprzedać wszystkie q_s jednostek swojego towaru (może się oczywiście zdarzyć, że dany kupujący ostatecznie nic nie kupi, a dany sprzedający nie wszystko sprzeda).

Zakładamy też, że każdy kupujący $k \in K$ ma preferencje w zbiorze S określone za pomocą pewnego liniowego porządku $>_k$. Innymi słowy, kupujący k jest w stanie ustawić wszystkich sprzedających (czyli tym samym towary, które oni posiadają) w kolejności od najbardziej mu odpowiadającego do najmniej mu odpowiadającego. Ciąg sprzedających ustawionych w takiej kolejności będzie nazywany listą preferencji kupującego k. Jeśli na przykład $S = \{s, t, u\}$, to zapis k: tsu oznacza, że kupującemu k najbardziej odpowiada towar, którym dysponuje sprzedający t, następnie towar sprzedającego s, a najmniej mu odpowiada towar sprzedającego u (inaczej $t >_k s >_k u$). Ciąg tsu jest w tym przypadku listą preferencji kupującego k. Przyjmujemy, dla uproszczenia, że równoważności są niedopuszczalne, to znaczy dla dowolnych dwóch sprzedających (towarów) s_1 i s_2, albo k woli s_1 od s_2, albo woli s_2 od s_1 i inne sytuacje są niemożliwe. Symbol $s_1 \geq_k s_2$ będzie oznaczał, że $s_1 >_k s_2$ lub $s_1 = s_2$.

Analogicznie określamy preferencje sprzedających w zbiorze K. Zakładamy, że każdy sprzedający jest w stanie ustawić kupujących w kolejności od najbardziej mu odpowiadającego do najmniej mu odpowiadającego i utworzyć w ten sposób swoją listę preferencji zawierającą wszystkich kupujących (nie dopuszczamy równoważności). Będziemy używali symboli $>_s$ i $\geq_s$, które mają podobne znaczenie jak poprzednio (tzn. oznaczają preferencje sprzedającego $s \in S$). Oczywiście założenie o preferencjach sprzedających w stosunku do kupujących jest mniej naturalne niż założenie o preferencjach kupujących w stosunku do sprzedających, ale w podanych niżej przykładach opisane są sytuacje, w których przyjęcie tego założenia jest jak najbardziej usprawiedliwione.

PRZYKŁAD 2.1. (rynek „szkolny")

Modelem rynku jest w tym przykładzie model rekrutacji kandydatów do szkół zaproponowany w 1962 roku przez Gale'a i Shapleya [5]. Model Gale'a-Shapleya stanowił inspirację do prowadzenia wielu badań (zarówno teoretycznych, jak i empirycznych) dotyczących różnego rodzaju rynków pracy czy rynków aukcyjnych ([8], [9]). W badaniach tych uwzględniano różne szczegółowe aspekty funkcjonowania takich rynków. Przedstawiony poniżej model jest tylko najprostszą wersją modelu Gale'a-Shapleya, będącą uproszczonym opisem dobrze znanych i działających w praktyce (również w Polsce) systemów rekrutacji do szkół (np. wyższych), zob. [11], [13].

W modelu tym zbiorem K jest zbiór kandydatów do szkół. Każdy z kandydatów chciałby otrzymać („kupić") jedno miejsce w którejś ze szkół ze zbioru S. Kandydaci mają preferencje w zbiorze S (tzn. każdy kandydat ma szkoły bardziej lub mniej mu odpowiadające i jest w stanie umieścić na swojej liście preferencji wszystkie szkoły w kolejności od najlepszej do najgorszej)[2]. Z kolei szkoły mają preferencje w zbiorze K (szkoły punktują kandydatów za różne osiągnięcia – na przykład uwzględniając oceny maturalne – i w ten sposób są w stanie ustawić wszystkich kandydatów na swojej liście preferencji). Zakładamy przy tym, że wszyscy kandydaci oceniani przez daną szkołę mają różne liczby punktów[3]. Liczbę q_s interpretujemy w tym przypadku jako limit szkoły $s \in S$, tzn. maksymalną liczbę kandydatów, którą ta szkoła jest w stanie przyjąć.

PRZYKŁAD 2.2. (rynek nieruchomości)

Ważnym nurtem badań w teorii ekonomii jest analiza rynków dóbr niepodzielnych, często o dużej wartości (domy, mieszkania, samochody, dzieła sztuki itp.). Modele matematyczne takich rynków (w szczególności modele równowagi) są często, wbrew pozorom, bardziej skomplikowane od klasycznych modeli równowagi, w których preferencje modelowane są za pomocą ciągłych funkcji użyteczności (zob. np. [14]). W naszych rozważaniach wystarczy posługiwanie się jedynie bardzo prostym modelem, w którym preferencje sprzedających są wyznaczone za pomocą cen granicznych, które kupujący gotowi są zapłacić za towary oferowane przez sprzedających.

Przypuśćmy na przykład, że sprzedającymi są deweloperzy ze zbioru S, z których każdy ($s \in S$) oferuje do sprzedaży pewną liczbę (q_s) jednakowych mieszkań (jeśli mieszkania oferowane przez s różniłyby się swoimi charakterystykami i miałyby – w oczach kupujących różną wartość, to moglibyśmy założyć, że każde mieszkanie oferuje inny sprzedawca). Kupującymi są klienci ze zbioru K, z których każdy zamierza kupić dokładnie jedno mieszkanie. Zakładamy, że każdy kupujący posiada preferencje w zbiorze oferowanych mieszkań (równoważnie – w zbiorze S) określone za pomocą pewnego liniowego porządku. Preferencje te (podobnie jak w neoklasycznej teorii konsumenta) nie zależą od cen oferowanych mieszkań. Preferencje sprzedających w zbiorze kupujących określamy następująco. Niech a_{ks} oznacza maksymalną cenę, którą kupujący $k \in K$ jest w stanie zapłacić za mieszkanie sprzedawane przez sprzedającego $s \in S$. Zakładamy, że jeśli $k \neq l$, to $a_{ks} \neq a_{ls}$. Relacja preferencji $>_s$ dla sprzedającego s jest określona w zbiorze K następująco:

---

[2] W praktyce kandydaci mają preferencje w podzbiorach zbioru S (tzn. są w stanie uporządkować tylko niektóre szkoły ze zbioru S). Przedstawioną teorię można łatwo rozszerzyć również na taki przypadek (zob. [12]).

[3] W praktyce kandydaci mogą mieć tę samą liczbę punktów. Zakładamy, że w takiej sytuacji szkoła stosuje dodatkowe kryteria (np. uwzględnia punkty z dodatkowych przedmiotów), które pozwalają rozróżnić kandydatów. Jeśli szkoła nie jest w stanie rozróżnić kandydatów na swojej liście preferencji (tzn. niektórzy kandydaci są równoważni), to niezbędne byłoby wprowadzenie do teorii tzw. miękkich limitów (zob. [11]), ale nie będziemy się tym zajmowali w tym artykule.

$$k >_s l \Leftrightarrow a_{ks} > a_{ls}$$

(sprzedający woli klienta, który gotowy jest zapłacić więcej od tego, który gotowy jest zapłacić mniej).

3. SKOJARZENIA I SKOJARZENIA STABILNE

Symbol ks będzie oznaczał parę nieuporządkowaną złożoną z elementów $k \in K$ i $s \in S$, czyli zbiór dwuelementowy $\{k, s\}$. Niech $E(K, S)$ oznacza zbiór wszystkich par nieuporządkowanych złożonych z elementów zbiorów K i S, tzn.

$$E(K, S) = \{ks\colon k \in K, s \in S\}.$$

Zbiór wszystkich transakcji na rynku można przedstawić jako pewien podzbiór zbioru $E(K, S)$. Podzbiór taki będę nazywał skojarzeniem[4]. Jeśli $\mu \subset E(K, S)$ jest skojarzeniem, to symbol $\mu(k)$ będzie oznaczał sprzedającego, z którym k zawarł transakcję (oczywiście może być co najwyżej jeden taki sprzedający, jeśli takiego sprzedającego nie ma to przyjmujemy $\mu(k) = \emptyset$). Symbol $\mu(s)$ będzie natomiast oznaczał zbiór kupujących, którzy zawarli transakcję z s (może być $\mu(s) = \emptyset$). Z podanych wcześniej założeń wynika, że liczba elementów zbioru $\mu(s)$ nie przekracza q_s. Skojarzenie μ będzie się nazywało skojarzeniem zupełnym, jeśli liczba elementów każdego zbioru $\mu(s)$ jest równa q_s. Wszystkie skojarzenia w dalszej części artykułu będą skojarzeniami zupełnymi. Warunkiem istnienia w zbiorze $E(K, S)$ przynajmniej jednego skojarzenia zupełnego jest nierówność $n \geq \Sigma_{(s \in S)} q_s$, gdzie n jest liczbą elementów zbioru K.

Definicja 3.1. Skojarzenie $\mu \subset E(K, S)$ nazywa się skojarzeniem stabilnym, jeśli nie istnieje para ks (nazywana parą blokującą dla μ) taka, że

1) k woli s od $\mu(k)$,

2) s woli k od przynajmniej jednego $l \in \mu(s)$

(zakładamy, że warunek 1) jest automatycznie spełniony, jeśli $\mu(k) = \emptyset$).

Zbiór transakcji μ jest więc niestabilny, jeśli istnieje para ks (blokująca dla μ) taka, że k i s woleliby zawrzeć transakcję ze sobą niż ze swoimi aktualnymi partnerami (tzn. s z jednym ze swoich aktualnych partnerów). W takiej sytuacji k i s będą mieli tendencję do zmiany istniejącego układu (np. zerwania dotychczasowych umów). Jeśli więc chcemy, aby rynek był stabilny, to powinniśmy dążyć (lub zachęcać uczestników rynku) do tworzenia skojarzeń stabilnych.

Pojęcie skojarzenia stabilnego jest podstawą teorii kojarzenia zapoczątkowaną przez Gale'a i Shapleya ([5]) i rozwijaną przez wielu ekonomistów (zob. np. [9]). Skojarzenie stabilne może być traktowane jako pewien rodzaj stanu równowagi na rynku z dwustronnymi preferencjami (gdyż żadna para uczestników rynku nie ma

---

[4] Używam terminu *skojarzenie*, który odpowiada używanemu powszechnie w teorii rynków z dwustronnymi preferencjami terminowi *matching*. W teoriach równowagi ekonomicznej często używany jest w tym kontekście termin *alokacja*.

tendencji do zmiany istniejącego układu). Zauważmy, że gdybyśmy wprowadzili na takim rynku jakiś układ cen, to moglibyśmy zdefiniować zwykłą równowagę rynkową (w sensie Walrasa). Interesujące byłoby wówczas następujące pytanie: Jaki jest związek skojarzeń stabilnych z równowagami rynkowymi wyznaczonymi przez pewien układ cen? W następnych punktach będę próbował odpowiedzieć na to pytanie, przy czym równowagę rynkową zdefiniuję w sposób bardzo ogólny, niekoniecznie odwołujący się do określonego układu cen (równowaga cenowa będzie szczególnym przypadkiem tak ogólnie określonej równowagi).

4. RÓWNOWAGA NA RYNKU Z DWUSTRONNYMI PREFERENCJAMI

Załóżmy, że sprzedający określają pewne warunki, których spełnienie przez kupujących gwarantuje im (kupującym) otrzymanie dóbr posiadanych przez sprzedających. Typowym warunkiem tego rodzaju jest warunek cenowy. Jeśli mianowicie sprzedający s określa cenę p_s na swoje dobro, to oznacza to, że stawia warunek: „Jeśli zapłacisz mi kwotę p_s, to otrzymasz jedną jednostkę posiadanego przeze mnie dobra". Szkoły mogą określić pewne progi punktowe jako warunki dostania się do danej szkoły. Warunek taki można sformułować następująco: „Jeśli wykażesz się odpowiednią liczbą punktów z wyznaczonych przedmiotów maturalnych, to zostaniesz przyjęty do naszej szkoły". Szkoły, firmy lub inne instytucje (ogólnie: dysponenci pewnych dóbr) mogą stawiać bardzo różne warunki, które gwarantują „kupującym" otrzymanie danych dóbr.

Załóżmy więc, że w rozważanym przez nas modelu każdy sprzedający $s \in S$ wyznaczył pewien warunek (warunki) taki, że jeśli kupujący $k \in K$ spełnił ten warunek, to może otrzymać jedną jednostkę dobra posiadanego przez s. Symbolem $W(s)$ oznaczymy zbiór kupujących, którzy spełnili warunek określony przez sprzedającego s, tzn.

$$W(s) = \{k \in K : k \text{ spełnił warunek wyznaczony przez } s\}.$$

W dalszych rozważaniach (w szczególności przy definiowaniu równowagi) istotne będą jedynie zbiory $W(s)$, a nie konkretny opis warunków wyznaczających te zbiory. Warunki wyznaczone przez sprzedających możemy więc (ryzykując pewną niedokładność, niemającą jednak wpływu na postać prezentowanych dalej definicji i twierdzeń) utożsamić ze zbiorami $W(s)$. Rodzinę zbiorów $W(s) \subset K$ indeksowaną przez elementy $s \in S$ będziemy nazywali układem warunków na rynku z dwustronnymi preferencjami (rynek *DP*). Wygodnie będzie przedstawiać taką rodzinę za pomocą funkcji $W\colon S \to P(K)$ ($P(K)$ jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru K). Przyjmujemy więc następującą definicję.

Definicja 4.1. Układem warunków na rynku *DP* nazywamy dowolną funkcję $W\colon S \to P(K)$.

To, że dany jest układ warunków W, oznacza że określone są pewne podzbiory $W(s)$ zbioru wszystkich kupujących K. Każdy ze zbiorów $W(s)$ wyznacza ograniczenie, jakie stawia sprzedający s kupującym, tzn. tylko kupujący ze zbioru $W(s)$ mogą zawrzeć transakcję ze sprzedającym s. O zbiorach $W(s)$ w tej chwili nic nie zakładamy, tzn. przyjmujemy, że każdy sprzedający może w zupełnie dowolny sposób określić warunki ograniczające zbiór kupujących, z którymi gotowy jest zawrzeć transakcję (w szczególności zakładamy, że możliwy jest przypadek, gdy $W(s) = \varnothing$, tzn. warunki mogą być tak silne, że żaden kupujący nie jest w stanie ich spełnić).

W dalszej części artykułu będziemy badać, jakie rodzaje warunków (tzn. jakie rodziny zbiorów $W(s)$) wyznaczają równowagę na rynku *DP*, oraz co trzeba założyć o zbiorach $W(s)$, żeby równowadze tej odpowiadało skojarzenie stabilne.

Aby zdefiniować równowagę na rynku *DP*, musimy określić, przy danym układzie warunków W, popyt na dobra oferowane przez sprzedających. Popyt na dobro oferowane przez sprzedającego s tworzą mianowicie ci kupujący, którzy spełniają warunki $W(s)$ i dla których s jest najlepszym sprzedawcą spośród tych, których warunki dany kupujący spełnił.

Określimy wielkość popytu w sposób bardziej formalny. Niech

$$D_W(k) = \{s \in S\colon k \in W(s)\}$$

będzie zbiorem dóbr (sprzedających) „dopuszczalnych" dla kupującego k przy warunkach W, tzn. zbiorem sprzedających, których warunki k spełnił i którzy gotowi są w związku z tym sprzedać mu posiadane przez siebie dobro (nie wykluczamy sytuacji, że zbiór $D_W(k)$ jest pusty, tzn. że k nie spełnił warunków żadnego sprzedającego).

Dla danego kupującego k, dla którego $D_W(k) \neq \varnothing$, określamy następnie najlepszego sprzedającego jako

$$M_W(k) = \max\,\{s \in S\colon s \in D_W(k)\}.$$

W podanym wzorze bierzemy maksimum ze względu na relację preferencji kupującego k w zbiorze $D_W(k)$ (ponieważ relacja preferencji jest liniowym porządkiem w S, a więc również w $D_W(k)$, więc istnieje dla niej jednoznacznie określony element maksymalny w zbiorze $D_W(k)$).

Definicja 4.2. Mówimy, że kupujący k tworzy popyt na dobro oferowane przez sprzedającego s, jeśli $M_W(k) = s$.

Innymi słowy, k tworzy popyt na dobro oferowane przez s, jeśli s jest najlepszym sprzedającym wśród wszystkich sprzedających dopuszczalnych dla k.

Zbiór wszystkich kupujących, którzy tworzą popyt na dobro oferowane przez s oznaczymy symbolem $\varphi_W(s)$. Mamy więc

$$\varphi_W(s) = \{k \in K : M_W(k) = s\}.$$

Wielkość popytu na dobro s możemy określić jako liczbę elementów zbioru $\varphi_W(s)$ (będziemy ją oznaczać symbolem $|\varphi_W(s)|$). Ponieważ podaż dobra s jest równa q_s, dochodzimy w oczywisty sposób do pojęcia równowagi.

Definicja 4.3. Układ warunków W tworzy równowagę na rynku z dwustronnymi preferencjami, jeśli dla dowolnego $s \in S$ mamy

$$|\varphi_W(s)| = q_s.$$

W sytuacji równowagi liczba kupujących, którzy tworzą popyt na dobro oferowane przez s jest więc dokładnie równa podaży dobra s (tzn. liczbie q_s).

Zauważmy, że wprowadzone pojęcie równowagi jest analogiczne do pojęcia równowagi konkurencyjnej w klasycznych (ciągłych) modelach rynku. Zbiór $D_W(k)$ może być traktowany jako odpowiednik zbioru wiązek dopuszczalnych w teorii konsumenta, natomiast element $M_W(k)$ – jako odpowiednik pojęcia wiązki optymalnej. Funkcja $(W, s) \to |\varphi_W(s)|$ może być interpretowana jako funkcja popytu w rozważanym przez nas modelu.

5. SKOJARZENIA STABILNE A RÓWNOWAGI

Okazuje się, że istnieje ścisły związek między skojarzeniami stabilnymi, a równowagami rynkowymi zdefiniowanymi za pomocą definicji 4.3. Aby określić ten związek, wprowadzimy dwa pojęcia: równowagi podstawowej i rozszerzenia poprawiającego daną równowagę. Zauważmy najpierw dwa proste fakty dotyczące zbiorów $\varphi_W(s)$:

(F1) Zbiory $\varphi_W(s)$ są rozłączne (dla różnych s, przy ustalonym W),
(F2) $\varphi_W(s) \subset W(s)$ dla dowolnego $s \in S$.

Fakt (F1) wynika stąd, że dla każdego k optymalny sprzedający $M_W(k)$ jest jednoznacznie określony, a fakt (F2) jest konsekwencją definicji $\varphi_W(s)$, $M_W(k)$ i $D_W(k)$.

Definicja 5.1. Równowaga W jest równowagą podstawową jeśli dla dowolnego $s \in S$ mamy

$$\varphi_W(s) = W(s).$$

Jeśli warunki W tworzą równowagę podstawową, to oznacza to, że:

1. Każdy kupujący, który spełnia warunki $W(s)$, tworzy popyt na dobro s (nie ma kupujących, którzy spełnialiby $W(s)$ i chcieliby otrzymać inne dobro niż s),
2. Każdy kupujący spełnia warunki tylko jednego sprzedającego (bo zbiory $W(s)$ są rozłączne, co wynika z (F1) i definicji 5.1)

Można też powiedzieć, że w warunkach równowagi podstawowej każdy sprzedający sprzedaje swój towar wybranym kupującym, którzy są z góry ustaleni (sprzedający s sprzedaje swój towar wszystkim ze zbioru $W(s)$).

Równowagi podstawowe są nieco sztucznym tworem (na przykład na rynku szkolnym na ogół będzie wielu kandydatów spełniających warunki danej szkoły, ale nie pragnących uczyć się w tej szkole), będą jednak potrzebne w dalszych rozważaniach, gdyż każdej takiej równowadze odpowiada dokładnie jedno skojarzenie i na odwrót.

Niech bowiem $\mu \subset E(K, S)$ będzie dowolnym skojarzeniem. Możemy wówczas określić równowagę podstawową wzorem:

$$W(\mu)(s) = \mu(s) = \{k \in K : ks \in \mu\}.$$

Okazuje się, że odwzorowanie $\mu \to W(\mu)$ jest wzajemnie jednoznaczną odpowiedniością między zbiorem skojarzeń (zupełnych), a zbiorem równowag podstawowych (zob. [12]).

Interesująca byłaby odpowiedź na pytanie: jakie równowagi odpowiadają przy odwzorowaniu $\mu \to W(\mu)$ skojarzeniom stabilnym. Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w poniżej podanym twierdzeniu 5.4. Przed sformułowaniem tego twierdzenia potrzebne są jeszcze dwie definicje.

Definicja 5.2. Niech W będzie równowagą podstawową. Rozszerzeniem poprawiającym równowagę W nazywamy odwzorowanie $V\colon S \to P(K)$ takie, że

1. $W(s) \subset V(s)$ dla dowolnego $s \in S$,
2. Dla dowolnego $s \in S$, jeśli k spełnia warunki $V(s)$ i nie spełnia warunków $W(s)$, to istnieje $l \in W(s)$ taki, że k jest lepszy od l dla sprzedającego s.

Określenie rozszerzenia poprawiającego równowagę W oznacza, dla każdego sprzedającego, osłabienie warunków W, ale w taki sposób, że każdy kupujący spełniający nowe warunki i niespełniający starych jest lepszy od przynajmniej jednego kupującego spełniającego stare warunki. Inaczej mówiąc, oznacza to, że każdy sprzedający określa nowe, mniej restrykcyjne warunki zakupu swoich towarów, przy czym stara się to zrobić w taki sposób, aby każdy kupujący spełniający te nowe warunki był dla tego sprzedającego co najmniej tak dobry, jak najgorszy z dotychczasowych kupujących (na przykład, żeby oferował cenę równą co najmniej najniższej z cen dotychczas oferowanych). Rozszerzenie warunków nie powinno więc być takie, aby ktόrykolwiek ze sprzedających na tym stracił.

Nie każde rozszerzenie poprawiające daną równowagę jest równowagą (np. rozszerzenie $g(v)$ w przykładzie 8.1). Równowagi, które mają tę własność, że każde ich rozszerzenie poprawiające jest równowagą, będę dalej nazywał równowagami stabilnymi. Mamy więc następującą definicję.

Definicja 5.3. Równowaga podstawowa nazywa się równowagą stabilną, jeśli dowolne jej rozszerzenie poprawiające jest równowagą.

W tradycyjnym ujęciu równowagi (np. w fizyce lub w teorii równowagi rynkowej) stabilność równowagi oznacza w pewnym sensie trudność w wytrąceniu danego układu ze stanu równowagi. W rozważanym tutaj modelu dyskretnym oczywiście trudno byłoby wprowadzić formalnie analogiczne pojęcie stabilności. Wydaje się jednak, że powyższa definicja jest uprawniona i ma pewien element wspólny z klasyczną definicją, gdyż mówi o tym, że jeśli przejdziemy od danej równowagi do jej rozszerzenia poprawiającego (czyli dokonamy operacji, którą w pewnym sensie można nazwać „wytrąceniem ze stanu równowagi"), to znowu znajdziemy się w stanie równowagi.

Okazuje się, że istnieje pewien prosty związek między tak zdefiniowanymi równowagami stabilnymi, a skojarzeniami stabilnymi w sensie Gale'a-Shapleya (zob. [12]).

Twierdzenie 5.4. Odwzorowanie $\mu \to W(\mu)$ określa wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem skojarzeń stabilnych, a zbiorem równowag stabilnych.

Z twierdzenia 5.4. wynika, że każdemu skojarzeniu stabilnemu odpowiada dokładnie jedna równowaga stabilna, a każdej równowadze stabilnej odpowiada dokładnie jedno skojarzenie stabilne. Z twierdzenia tego możemy też otrzymać następującą charakteryzację skojarzeń stabilnych:

Wniosek 5.5. Skojarzenie μ jest stabilne wtedy, i tylko wtedy, gdy równowaga $W(\mu)$ jest stabilna.

6. RÓWNOWAGI PORZĄDKOWE

Zdefiniujemy teraz tzw. równowagi porządkowe, których szczególnym rodzajem są równowagi cenowe (tzn. równowagi, dla których warunki $W(s)$ określone są za pomocą cen p_s wyznaczonych przez sprzedających, a preferencje sprzedających w zbiorze K określone są za pomocą maksymalnych cen a_{ks} oferowanych przez kupujących – podobnie jak w przykładzie 2.2).

Równowaga porządkowa jest określona za pomocą tzw. warunków porządkowych, tzn. warunków, które mają tę własność, że jeśli jakiś kupujący spełnia taki warunek, to każdy kupujący lepszy od niego też spełnia ten warunek. Jeśli na przykład sprzedający s sprzedaje swój towar za cenę p_s (co oznacza, że zapłacenie ceny p_s jest warunkiem otrzymania przez kupującego towaru oferowanego przez s), a pewien kupujący $k \in K$ jest skłonny zapłacić cenę $a_{ks} \geq p_s$, to każdy kupujący $l \in K$, który gotowy jest zapłacić więcej niż a_{ks} (np. $a_{ls} > a_{ks}$) automatycznie spełnia warunek sprzedającego s, bo oczywiście $a_{ls} > p_s$.

Definicja 6.1. Warunek $W(s)$ nazywa się warunkiem porządkowym, jeśli dla dowolnych $k,\ l \in K$ zachodzi:

$$k \in W(s) \text{ i } l >_s k \Rightarrow l \in W(s).$$

Jeśli $W(s) \neq \emptyset$, to „porządkowość” $W(s)$ oznacza, że

$$W(s) = \{k \in K : k \geq_s \min W(s)\}.$$

(Jeśli $W(s) \neq \emptyset$, to min $W(s)$ oznacza minimalny element zbioru $W(s)$ ze względu na porządek $>_s$). Innymi słowy, $W(s)$ jest w tym przypadku przedziałem początkowym w zbiorze liniowo uporządkowanym K. Przedział ten składa się z pewnego „granicznego” kupującego $k = \min W(s)$ i wszystkich kupujących lepszych od niego (w sensie relacji $>_s$). Graniczny (tzn. najgorszy w zbiorze $W(s)$) kupujący będzie nazywany minimalnym kupującym dla s ze względu na warunki $W(s)$ (minimalny kupujący jest określony tylko w przypadku, gdy $W(s) \neq \emptyset$).

Przykładem warunku porządkowego jest właśnie przedstawiony powyżej warunek cenowy, dla którego

$$W(s) = \{k \in K : a_{ks} \geq p_s\},$$

gdzie p_s jest ceną określoną przez sprzedającego $s \in S$, a liczby a_{ks} są interpretowane tak jak w przykładzie 2.2.

Definicja 6.2. Równowaga W nazywa się równowagą porządkową, jeśli wszystkie warunki $W(s)$, $s \in S$, są warunkami porządkowymi.

Definicja 6.3. Równowaga porządkowa W nazywa się równowagą brzegową, jeśli każdy minimalny kupujący dla $s \in S$, przy warunkach $W(s)$, tworzy popyt na s, tzn. jeśli dla dowolnego $k \in K$ spełniony jest warunek:

$$k = \min W(s) \Rightarrow s = M_W(k).$$

Innymi słowy, dla równowagi brzegowej zachodzi $\min W(s) = \min \varphi_W(s)$ (zauważmy, że $W(s) \neq \emptyset$, bo W jest równowagą). Warunki $W(s)$ dla równowagi brzegowej mają więc tę własność, że jeśli pewien kupujący k jest najgorszy w zbiorze wszystkich kupujących spełniających warunki $W(s)$, to sprzedający s jest najlepszy dla k w zbiorze wszystkich sprzedających, których warunki kupujący k spełnił.

7. ZWIĄZEK RÓWNOWAG PORZĄDKOWYCH ZE SKOJARZENIAMI STABILNYMI

Twierdzenie 5.4 pokazuje, że istnieje ścisły związek między skojarzeniami stabilnymi a równowagami stabilnymi (będącymi pewnym rodzajem równowag podstawowych). Okazuje się, że można ustanowić również podobny związek (podany niżej w twierdzeniu 7.1) między skojarzeniami stabilnymi a równowagami brzegowymi (będącymi pewnym rodzajem równowag porządkowych).

Zdefiniujemy najpierw pewne odwzorowanie ze zbioru skojarzeń (zupełnych) do zbioru funkcji $S \to P(K)$. Niech μ będzie dowolnym skojarzeniem. Definiujemy funkcję $g(\mu) : S \to P(K)$ następująco:

$$g(\mu)(s) = \{k \in K\colon k \geq_s \min \mu(s)\}.$$

Ponieważ μ jest zupełne, więc zbiory $\mu(s)$ są niepuste, czyli odwzorowanie g jest dobrze określone.

Twierdzenie 7.1. Odwzorowanie $\mu \to g(\mu)$ określa wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem skojarzeń stabilnych a zbiorem równowag brzegowych.

Dowód. Określimy odwzorowanie h ze zbioru funkcji $S \to P(K)$ do zbioru podzbiorów zbioru $E(K, S)$. Niech V będzie funkcją $S \to P(K)$. Definiujemy zbiór $h(V) \subset E(K, S)$ następująco:

$$h(V) = \{ks \in E(K, S)\colon s = M_V(k)\} = \{ks \in E(K, S)\colon k \in \varphi_V(s)\}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli V jest równowagą, to $h(V)$ jest skojarzeniem (zupełnym). Aby udowodnić twierdzenie 7.1 wystarczy pokazać, że odwzorowanie g przekształca skojarzenia stabilne na równowagi brzegowe, h przekształca równowagi brzegowe na skojarzenia stabilne oraz, że g i h są wzajemnie do siebie odwrotne. W tym celu udowodnimy następujące dwa lematy:

Lemat 7.2. Jeśli μ jest skojarzeniem stabilnym, to $g(\mu)$ jest równowagą brzegową oraz $h(g(\mu)) = \mu$,

Lemat 7.3. Jeśli V jest równowagą brzegową, to $h(V)$ jest skojarzeniem stabilnym oraz $g(h(V)) = V$.

Dowód lematu 7.2. Niech μ będzie dowolnym skojarzeniem stabilnym. Udowodnimy po kolei następujące fakty:
(1) $g(\mu)$ jest równowagą porządkową,
(2) $\mu \subset h(g(\mu))$,
(3) $\mu = h(g(\mu))$,
(4) $g(\mu)$ jest równowagą brzegową.

Aby udowodnić (1), należy zauważyć, że $g(\mu)$ jest rozszerzeniem poprawiającym równowagi podstawowej $W(\mu)$ (bo $W(\mu)$ jest wyznaczona za pomocą zbiorów $\mu(s)$), a więc na mocy wniosku 5.5 i definicji 5.3, uwzględniając założenie, że μ jest stabilne, otrzymujemy, że $g(\mu)$ jest równowagą. Bezpośrednio z definicji $g(\mu)$ wynika też, że $g(\mu)$ jest równowagą porządkową.

Przystępujemy do dowodu zawierania (2). Załóżmy, że $ks \in \mu$. Stąd $k \in \mu(s)$, czyli $k \geq_s \min \mu(s)$, a więc $k \in g(\mu)(s)$. Stąd $s \in D_{g(\mu)}(k)$. Niech $t = M_{g(\mu)}(k)$ będzie elementem maksymalnym w zbiorze $D_{g(\mu)}(k)$ ze względu na relację $>_k$ (taki element istnieje, bo $D_{g(\mu)}(k) \neq \varnothing$). Udowodnimy, że $t = s$. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Gdyby $t \neq s$, to $t >_k s$ (bo t jest maksymalny), a więc, z jednoznaczności $\mu(k)$, $kt \notin \mu$, czyli $k \notin \mu(t)$. Dalej, ponieważ $t \in D_{g(\mu)}(k)$, więc $k \in g(\mu)(t)$, a stąd $k \geq_t \min \mu(t)$. Ponieważ $k \notin \mu(t)$, więc $k >_t \min \mu(t)$. Stąd i z warunku $t >_k s$ wynika, że para kt spełnia warunki 1) i 2) z definicji 3.1 (dla skojarzenia μ), a więc skojarzenie μ nie jest stabilne, wbrew założeniu. Mamy więc $t = s$, czyli $s = M_{g(\mu)}(k)$, a więc $ks \in h(g(\mu))$. Udowodniliśmy w ten sposób zawieranie $\mu \subset h(g(\mu))$.

Aby udowodnić (3), czyli równość $\mu = h(g(\mu))$ wystarczy zauważyć, że zbiory μ oraz $h(g(\mu))$ są równoliczne. Wynika to stąd, że $g(\mu)$ jest równowagą oraz stąd, że dla dowolnej równowagi V, skojarzenie $h(V)$ zawiera dokładnie $\sum_s q_s$ elementów, tzn. tyle samo co skojarzenie μ (bo μ jest zupełne).

Warunek (4) wynika teraz w prosty sposób z równania (3). Mamy bowiem dla dowolnego $s \in S$:

$$\mu(s) = h(g(\mu))(s) = \varphi_{g(\mu)}(s).$$

Stąd min $g(\mu)(s)$ = min $\mu(s)$ = min $\varphi_{g(\mu)}(s)$, a więc równowaga $g(\mu)$ jest brzegowa.

Dowód lematu 7.3. Udowodnimy najpierw, że dla dowolnej równowagi porządkowej V, zbiór $h(V)$ jest skojarzeniem stabilnym. Niech $\mu = h(V)$. Z definicji $h(V)$ wynika, że μ jest skojarzeniem. Załóżmy, że μ jest niestabilne. Istnieje więc para ks taka, że $s >_k \mu(k)$ oraz $k >_s l$ dla pewnego $l \in \mu(s)$. Ponieważ $l \in \mu(s) = h(V)(s) = \varphi_V(s) \subset V(s)$, a równowaga V jest porządkowa, więc $k >_s l$ implikuje $k \in V(s)$. Stąd $s \in D_V(k)$. Mamy więc $D_V(k) \neq \varnothing$ oraz $\mu(k) = h(V)(k) = M_V(k) \geq_k s$, a to jest sprzeczne z przyjętym na początku warunkiem $s >_k \mu(k)$. Wynika stąd, że skojarzenie $\mu = h(V)$ jest stabilne.

Udowodnimy teraz, że jeśli V jest równowagą brzegową, to $g(h(V)) = V$. Korzystając z definicji 6.1 i 6.3 oraz z definicji funkcji g i h, dla dowolnego $s \in S$ mamy:

$$\begin{aligned} g(h(V))(s) &= \{k \in K\colon k \geq_s \min h(V)(s)\} = \{k \in K\colon k \geq_s \min \varphi_V(s)\} \\ &= \{k \in K\colon k \geq_s \min V(s)\} = V(s), \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu 7.3, a więc również twierdzenia 7.1.

8. PRZYKŁADY

Podamy teraz dwa przykłady ilustrujące przedstawioną teorię.

PRZYKŁAD 8.1.

Niech $K = \{A, B, C, D, E\}$ oraz $S = \{X, Y, Z\}$ będą zbiorami kupujących i sprzedających odpowiednio. Załóżmy, że limity dla sprzedających są równe: $q_X = 2$, $q_Y = 2$, $q_Z = 1$, a preferencje kupujących i sprzedających mają postać A: XYZ, B: YZX, C: YXZ, D: ZYX, E: ZXY, X: $CEBAD$, Y: $ACBED$, Z: $BECDA$. Rozważmy skojarzenie $\mu = \{AX, BY, CY, DX, EZ\}$. Jest to skojarzenie stabilne, ponieważ kupujący A, B, C, E nie mogą tworzyć par blokujących (są skojarzeni z najlepszymi sprzedającymi na swoich listach preferencji), skąd wynika, że jedynymi parami blokującymi mogłyby być pary DZ i DY. Zauważmy jednak, że Z woli E (z którym jest skojarzony) od D, a Y woli C i B od D. Stąd DZ i DY nie są parami blokującymi. Skojarzeniu μ odpowiada równowaga podstawowa

$$W = W(\mu) = \{AD, CB, E\}$$

(powyższy zapis oznacza, że $W(X) = \{A, D\}$, $W(Y) = \{C, B\}$, $W(Z) = \{E\}$). Mamy wiec tutaj przykład odpowiedniości $\mu \to W(\mu)$, tak jak w twierdzeniu 5.4. Na mocy tego twierdzenia równowaga $W(\mu)$ jest stabilna, a więc każde jej rozszerzenie poprawiające jest równowagą.

Przykładami równowag niepodstawowych są:

$U = \{BAD, ACB, BE\}$,

$V = \{CEBAD, ACB, BE\}$,

$T = \{CEBAD, ACBE, BEC\}$.

Wszystkie te równowagi wyznaczają to samo skojarzenie μ, inaczej mówiąc, $h(U) = h(V) = h(T) = \mu$. Równowagi U i V są rozszerzeniami poprawiającymi równowagę $W(\mu)$ (a więc są równowagami na mocy twierdzenia 5.4 i definicji 5.3). Równowaga V jest brzegowa, przy czym $g(\mu) = V$. Mamy więc odpowiedniość $\mu \to g(\mu) = V$, taką jak w twierdzeniu 7.1. Równowaga T jest równowagą porządkową, chociaż nie jest brzegowa (np. kupujący E jest kupującym minimalnym dla sprzedającego Y, ale nie tworzy popytu na Y). Równowaga T jest jednocześnie przykładem rozszerzenia niepoprawiającego dla $W(\mu)$ (bo np. kupujący E jest dla Y gorszy od wszystkich kupujących, którzy spełniają warunek $W(\mu)$ wyznaczony przez Y, tzn. od C i B).

Przykładem skojarzenia niestabilnego dla podanego układu preferencji jest skojarzenie

$$\nu = \{AY, BY, CX, DZ, EX\}.$$

Skojarzenie ν jest niestabilne, gdyż np. para CY jest parą blokującą (C woli Y od X, a jednocześnie Y woli C od B). Zauważmy, że funkcja

$$g(\nu) = \{CE, ACB, BED\}$$

nie jest w tym przypadku równowagą, gdyż ani C, ani E nie tworzą popytu na X (dla warunków $g(\nu)$). Tym bardziej więc $g(\nu)$ nie jest w tym przypadku równowagą brzegową.

PRZYKŁAD 8.2.

W przykładzie tym określone zostanie skojarzenie niestabilne ν, dla którego $g(\nu)$ jest równowagą brzegową.

Załóżmy, że $K = \{A, B, C, D\}$, $S = \{X, Y\}$ są zbiorami kupujących i sprzedających, podaże sprzedających są równe $q_X = 2$, $q_Y = 2$, a preferencje określone są następująco: A: YX, B: XY, C: YX, D: XY, X: $DCBA$, Y: $CDAB$. Rozważmy skojarzenia: $\mu = \{AY, BX, CY, DX\}$, $\nu = \{AY, BX, CX, DY\}$. Łatwo sprawdzić, że μ jest stabilne, a ν niestabilne (np. para CY jest blokująca dla ν). Odpowiednie równowagi podstawowe mają postać:

$$W(\mu) = \{DB, CA\},$$
$$W(\nu) = \{CB, DA\}.$$

Rozszerzenia porządkowe równowag $W(\mu)$ i $W(\nu)$ są jednakowe i mają postać:

$$g(\mu) = g(\nu) = \{DCB, CDA\}.$$

Są to wiec równowagi brzegowe (bo μ jest stabilne). Oczywiście $h(g(\mu)) = h(g(\nu)) = \mu$.

Może się więc okazać, że równowaga brzegowa jest obrazem, przy odwzorowaniu g, jakiegoś skojarzenia niestabilnego (chociaż, oczywiście, zawsze jest też obrazem jednoznacznie określonego skojarzenia stabilnego, co wynika z twierdzenia 7.1). Wynika stąd, że nie da się z twierdzenia 7.1 wyciągnąć wniosku analogicznego do wniosku 5.5 (wynikającego z twierdzenia 5.4), tzn. nie jest prawdą, że skojarzenie μ jest stabilne wtedy, i tylko wtedy, gdy $g(\mu)$ jest równowagą brzegową.

9. PODSUMOWANIE

W pracy zostały określone związki między skojarzeniami stabilnymi w modelu Gale'a-Shapleya a odpowiednio określonymi równowagami rynkowymi. Pojęcie równowagi zostało zdefiniowane w bardzo ogólny sposób – za pomocą układu warunków, które muszą spełniać kupujący, jeśli chcą nabyć dobra oferowane przez sprzedających. Szczególnym rodzajem tego typu warunków są warunki cenowe, występujące w klasycznych modelach równowagi rynkowej. Uzyskane wyniki mogą służyć do badania równowag w dyskretnych modelach rynków za pośrednictwem teorii skojarzeń stabilnych. Pierwszy oczywisty wniosek jest taki, że w przedstawionym modelu rynku istnieje przynajmniej jedna równowaga brzegowa (a więc również cenowa) – bo w modelu Gale'a-Shapleya zawsze istnieje co najmniej jedno skojarzenie stabilne. Jeśli z kolei, przy danym układzie preferencji, skojarzeń stabilnych jest odpowiednio dużo (w niektórych przypadkach liczba ta może zależeć nawet wykładniczo od liczby uczestników rynku – zob. [4]), to mamy gwarancję istnienia odpowiednio dużej liczby równowag brzegowych (czyli istotnie różnych, tzn. dających różne skojarzenia, równowag cenowych).

Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii

LITERATURA

[1] Camina E., [2006], *A generalized assignment game*, „Mathematical Social Sciences", Vol. 52, s. 152-161.
[2] Chen Y., Sönmez T., [2006], *School choice: an experimental study*, „Journal of Economic Theory", Vol. 127, s. 202-231.
[3] Crawford V.P., Knoer E.M., [1981], *Job matching with heterogeneous firms and workers*, „Econometrica", Vol. 49, s. 437-450.
[4] Gale D., [2001], *The two-sided matching problem. Origin, development and current issues*, „International Game Theory Review", Vol. 3, s. 237-252.
[5] Gale D., Shapley L.S., [1962], *College Admissions and the Stability of Marriage*, „American Mathematical Monthly", Vol. 69, s. 9-15.
[6] Kelso A.S., Crawford V.P., [1982], *Job matching, coalition formation and gross substi tutes*, „Econometrica", Vol. 50, s. 1483-1504.

[7] Pais J., Pinter A., [2008], *School choice and information: An experimental study on match ing mechanisms*, Games and Economic Behavior, Vol. 64, s. 303-328.
[8] Roth A.E., [2002], *The economist as engineer: game theory, experimentation, and computation as tools for design economics*, „Econometrica", Vol. 70, s. 1341-1378.
[9] Roth A.E., Sotomayor M.A., [1992], *Two-sided matching. A study in game-theoretic modeling and analysis*, Cambridge University Press.
[10] Sotomayor M., [2007], *Connecting the cooperative and competitive structures of the multiple-partners assignment game*, „Journal of Economic Theory", Vol. 134, s. 155-174.
[11] Świtalski Z., [2005], *Optymalny system rekrutacji kandydatów do szkół*, „Badania Operacyjne i Decyzje", Vol. 3-4, s. 85-98.
[12] Świtalski Z., [2008], *Stability and equilibria in the matching models*, „Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science", Częstochowa University of Technology, Vol. 2(7), s. 77-85.
[13] Świtalski Z., [2008], *O kojarzeniu małżeństw i rekrutacji kandydatów do szkół*, „Wiadomości Matematyczne", Vol. 44, s. 35-46.
[14] Yang Z., [2003], *A competitive market model for indivisible commodities*, „Economics Letters", Vol. 78, s. 41-47.

Praca wpłynęła do redakcji w lutym 2010 r.

RÓWNOWAGI NA RYNKACH Z DWUSTRONNYMI PREFERENCJAMI

Streszczenie

W artykule wprowadzono pojęcie równowagi rynkowej w modelu rynku z dwustronnymi preferencjami (model jest wzorowany na znanym modelu rekrutacji kandydatów do szkół, pochodzącym od Gale'a i Shapleya z 1962 roku). Zbadano związki wprowadzonego pojęcia równowagi z pojęciem skojarzenia stabilnego zdefiniowanego przez Gale'a i Shapleya.

Słowa kluczowe: równowaga rynkowa, dwustronne preferencje, skojarzenie stabilne

EQUILIBRIA IN MARKETS WITH TWO-SIDED PREFERENCES

Summary

In the paper we have introduced a concept of market equilibrium in the model of market with two-sided preferences (the model is based on the well-known Gale-Shapley model of college admissions from 1962). We have investigated relationships between our concept of equilibrium and the concept of stable matching as defined by Gale and Shapley.

Key words: Market equilibrium, Two-sided preferences, Stable matching, College admissions, Gale-Shapley model