O PROBLEMIE ELFVINGA

Anna Krasnosielska*

Streszczenie: *W niniejszej pracy analizowany jest problem optymalnego stopowania znany jako problem Elfvinga. Problem ten można sformułować następująco: selekcjoner obserwuje oferty pojawiające się sekwencyjnie w momentach skoków procesu Poissona. W momencie pojawienia się oferty podejmuje on decyzję odnośnie zaakceptowania bądź odrzucenia prezentowanej właśnie oferty. Odrzucone przez niego oferty nie mogą być ponownie rozpatrywane. Wypłata, jaką otrzyma, wybierając daną ofertę, jest równa zdyskontowanej wartości tej oferty. Zadaniem selekcjonera jest maksymalizowanie oczekiwanej wypłaty. W niniejszej pracy zaprezentowano zastosowania w naukach ekonomicznych i społecznych tak sformułowanego problemu. Przedstawiono również strategię optymalnego postępowania oraz zaprezentowano równanie różniczkowe pozwalające analitycznie wyliczać wartość optymalnej oczekiwanej wypłaty. Ponadto zbadano wpływ parametrów modelu na wartość optymalnej oczekiwanej wypłaty oraz obliczono średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania.*

Słowa kluczowe: *: optymalne stopowanie, proces Poissona, problem Elfvinga, moment zatrzymania.*

ON ELFVING PROBLEM

Abstract: *In this paper we analyze the optimal stopping time problem known as Elfving problem. The problem can be formulated as follows: a decision maker observes offers which appear at jump times of a Poisson process. The decision concerning acceptance or rejection of a presented offer is made at the moment of its appearance. Once rejected, offer cannot be considered again. A reward for the decision maker is equal to the discounting value of the selected offer. The aim of the decision maker is to maximize his expected reward. In this paper we present applications of the described model in economy and sociology. We also present the optimal strategy and a differential equation which*

* Anna Krasnosielska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa, faks: (0-22) 625-74-60, e-mail: akrasno@mini.pw.edu.pl

allows us to compute the optimal mean reward. Moreover, we analyze the influence of model's parameters on the value of optimal mean reward and we compute the mean time of waiting for the optimal stopping time.

Keywords: *optimal stopping, Poisson process, Elfving problem, stopping time.*

1. Wprowadzenie

Zagadnienie optymalnego stopowania ma wiele zastosowań zarówno w naukach społecznych, jak i ekonomicznych. Stąd też różnorodność licznych interpretacji tego modelu. Poniżej przedstawimy kilka z nich.

Przypuśćmy, że chcemy sprzedać dom. W losowych momentach pojawiają się kupcy i każdy z nich oferuje pewną kwotę, która nie podlega negocjacjom. Kupcy prezentują swoje oferty pojedynczo. Decyzję odnośnie sprzedaży domu musimy podjąć w momencie prezentacji danej oferty, gdyż nie ma możliwości powrotu do odrzuconej oferty. Decyzję tę podejmujemy na podstawie wiedzy o wysokości obecnie prezentowanej oferty i ofert prezentowanych w przeszłości. Z upływem czasu wartość domu maleje (np. ze względu na zmianę wartości pieniądza w czasie, pogarszającego się stanu domu, ponoszonych kosztów utrzymania i konserwacji domu). Zatem, im dłużej sprzedaż jest odkładana, tym zysk ze sprzedaży jest mniejszy. W związku z tym pojawiają się następujące pytania:

- Kiedy powinniśmy sprzedać dom, aby zyskać jak najwięcej (jaka jest optymalna strategia postępowania)?
- Jaka jest wysokość optymalnej oczekiwanej wypłaty?
- Jaki jest średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania?

Rozważmy teraz inną sytuację. Przypuśćmy, że poszukujemy pracy. Oferty pracodawców prezentowane są w losowych momentach w taki sposób, że w danej chwili prezentowana jest dokładnie jedna oferta. Załóżmy, że natychmiast po zapoznaniu się z daną ofertą podejmujemy decyzję odnośnie jej akceptacji bądź odrzucenia. Oznacza to, że nie obserwujemy żadnych następnych ofert dopóki nie podejmiemy decyzji odnośnie prezentowanej obecnie. Przypuśćmy również, że raz odrzucona oferta nie może być ponownie rozważana (potencjalny pracodawca nie będzie czekał aż zmienimy zdanie odnośnie jego oferty). Możemy również zakładać, że z upływem czasu nasza atrakcyjność jako potencjalnego pracownika spada (pod warunkiem, że nie podejmujemy żadnej innej pracy w tym czasie). Ponadto z upływem czasu oferty (a dokładniej wysokość wynagrodzenia związanego z daną ofertą), które będziemy otrzymywać, będą coraz mniej interesujące. Zatem, również w tym problemie pojawia się pytanie, kiedy należy przestać szukać i przyjąć proponowaną ofertę pracy.

W podobny sposób można sformułować następujące problemy:
- problem sprzedaży pewnych własności (np. komputera, samochodu, papierów wartościowych),
- problem sekretarki (problem poszukiwania najlepszego pracownika),
- problem miejsca parkingowego (jak znaleźć miejsce parkingowe najbliżej wejścia),
- problem turysty (jak znaleźć najlepszy hotel przy autostradzie), znany również jako problem wynajmu apartamentu,
- problem małżeński (kiedy przestać szukać partnerki/partnera i ożenić się/ wyjść za mąż).

We wszystkich zaprezentowanych powyżej problemach główne pytanie brzmi: kiedy należy przestać szukać lub kiedy należy przestać czekać i zaakceptować obecnie prezentowaną ofertę.

Model matematyczny powyżej opisanych zagadnień daje odpowiedź, jak należy postępować w przedstawionych powyżej problemach, aby maksymalizować optymalną oczekiwaną wypłatę.

Wiele prac z zakresu optymalnego stopowania było inspirowanych powyżej zaprezentowanymi zastosowaniami [obszerną bibliografię na ten temat można znaleźć w pracy Samuelsa (1991)]. Analizowany problem optymalnego stopowania został sformułowany i rozwiązany w pracy Elfvinga (1967), a następnie uogólniony na przypadek gry wieloosobowej z priorytetami w pracach Ferenstein i Krasnosielskiej (2008a, 2008b). Problem sprzedaży k identycznych towarów oparty na problemie sformułowanym przez G. Elfvinga był analizowany w pracach Stadje (1987, 1990). Cowan i Zabczyk (1978) rozważali problem wyboru najlepszego apartamentu w skończonym czasie. Autorzy analizowali model, w którym oferty pojawiały się również w momentach skoków procesu Poissona. Ogólne problemy z zakresu teorii optymalnego stopowania były rozważane w pracy Siegmunda (1967). Problem sprzedaży domu, w sytuacji gdy jest tylko dwóch potencjalnych kupców, został opisany w pracy Brussa (2005). Autor prezentuje Z-strategię, która pozwala zwiększyć prawdopodobieństwo wybrania lepszej oferty spośród dostępnych, jeśli nie znamy wysokości tych ofert.

Interesujące podejście do problemu optymalnego stopowania zostało również przedstawione w pracy Ferenstein i Sierocińskiego (1997), w której autorzy analizują problem optymalnego sterowania procesem ryzyka.

Problem maksymalizacji oczekiwanej wypłaty z niepełną informacją był rozważany między innymi w pracach Beardena (2006), Samuel-Cahn (2005) oraz Szajowskiego (2006). Bearden (2006) analizował problem, w którym wypłata decydenta jest równa akceptowanej przez niego ofercie X_i, gdzie X_i jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na [0,1]. W swojej pracy autor założył, że decydent posiada tylko informację odnośnie tego, czy obecnie prezentowana oferta jest najlepsza spośród ofert obserwowanych do tego momentu. Bearden pokazał, że optymalna strategia postępowania w tak sformułowanym problemie jest następująca: obserwować $c - 1$ ofert spośród N zgłoszonych, gdzie $c \in \left\{ \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor, \left\lceil \sqrt{N} \right\rceil \right\}$, po czym wybrać pierwszą najlepszą z obserwowanych do danej chwili. Jeśli taka oferta się nie pojawiła, należy wybrać ostatnią. Rozważany przez autora problem został zmodyfikowany we wspomnianych już pracach Samuel-Cahn (2005) i Szajowskiego (2006). Mianowicie Samuel-Cahn (2005) analizowała różne rozkłady zmiennej losowej X_i, a Szajowski (2006) wprowadził dodatkowo koszty związane ze stresem towarzyszącym podejmowaniu decyzji.

Prowadzone były również badania empiryczne dotyczące zachowań osób podejmujących decyzje w sytuacjach zbliżonych do tych, które były analizowane w modelach matematycznych dotyczących problemu optymalnego wyboru [patrz Bearden *et al*. (2005, 2006), Seale i Rapoport (2000), Stein *et al*. (2003), Zwick *et al*. (2003)]. Badania te wykazały, że osoby podejmujące decyzje zwykle akceptują ofertę zbyt wcześnie, czyli skracają czas obserwacji w stosunku do tego, który model matematyczny wskazuje jako optymalny.

W niniejszej pracy zaprezentowano model Elfvinga oraz przeprowadzono analizę wysokości optymalnej oczekiwanej wypłaty w zależności od parametrów modelu. Zaprezentowano również metodę obliczania średniego czasu oczekiwania na optymalny moment zatrzymania.

2. Problem Elfvinga

W tym rozdziale przypomnimy problem Elfvinga sformułowany i rozwiązany w pracy Elfvinga (1967) [zobacz również Chow *et al*. (1971), str. 113-118].

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że oferty $Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie, takim, że $E(Y_1) < \infty$ oraz dystrybuanta F zmiennej losowej Y_1 jest ciągła. Zmienne losowe $Y_1, Y_2, \ldots$ pojawiają się w momentach skoków $\tau_1, \tau_2, \ldots$ jednorodnego procesu Poissona $N(s)$, $s \geq 0$, o intensywności λ. Ciągi zmiennych losowych $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne. Przyjmijmy ponadto $\tau_0 = 0$. Niech $r:[0,\infty) \to [0,1]$ będzie daną funkcją dyskontującą, spełniającą następujące warunki: $r(0) = 1$, $r(u) \neq 0$ dla $u \in [0,U)$ i $r(u) = 0$ w przeciwnym przypadku, gdzie $U \in [0,\infty]$. Ponadto zakładamy, że $r(\cdot)$ jest funkcją nierosnącą, ciągłą w przedziale $[0,U)$ oraz

$$\int_0^\infty r(u)du < \infty.$$

Wypłata selekcjonera akceptującego ofertę Y_n w momencie τ_n jest postaci $X_n = Y_n r(\tau_n)$. Selekcjoner może zaakceptować co najwyżej jedną ofertę. Decyzja ta musi być podjęta w momencie jej pojawienia się. Celem selekcjonera jest maksymalizowanie oczekiwanej wypłaty.

Zdefiniujmy σ-ciało $F_n = \sigma(Y_1,...,Y_n,\tau_1,...,\tau_n)$. Niech T będzie dyskretnym zbiorem momentów zatrzymania adaptowanych do F_n. Niech $V(u)$ będzie optymalną oczekiwaną wypłatą selekcjonera dla ciągu wypłat postaci $Y_n r(u + \tau_n)$, gdzie $u \geq 0$. Zdefiniujmy następujący moment stopu:

$$\sigma(u) = \inf\{n \geq 1 : Y_n r(u + \tau_n) \geq V(u + \tau_n)\}.$$

Z teorii optymalnego stopowania [patrz Chow *et al*. (1971)] wiemy, że $\sigma(u)$ jest optymalnym momentem zatrzymania ciągu $Y_n r(u + \tau_n)$ oraz

$$V(u) = \sup_{t \in T} E(Y_t r(u + \tau_t)) = E(Y_{\sigma(u)} r(u + \tau_{\sigma(u)})).$$

Zauważmy, że $\sigma(0)$ jest optymalnym momentem zatrzymania oraz $V(0)$ jest optymalną oczekiwaną wypłatą dla selekcjonera obserwującego ciąg $Y_n r(\tau_n)$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$G(y) = 1 - F(y), \tag{1}$$

$$H(y) = \int_y^\infty y' dF(y'), \tag{2}$$

$$f_u(v) = P(\tau_{\sigma(u)} > v)$$

oraz

$$y(u) = \frac{V(u)}{r(u)} \qquad \text{jeśli} \quad u \in [0, U) \tag{3}$$

i $y(u) = 0$ w przeciwnym przypadku. Przeprowadzając obliczenia analogiczne jak w pracy Chow'a *et al*. (1971), str. 114-115, i uwzględniając fakt, że oferty pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnością λ, otrzymujemy ogon rozkładu zmiennej losowej $\tau_{\sigma(u)}$ [patrz również Elfving (1967), wzór 2.2]

$$f_u(v) = \exp\left(-\int_u^{u+v} \lambda G(y(v'))dv'\right) \qquad \text{dla} \quad 0 \le v < U - u, \quad 0 \le u < U \tag{4}$$

oraz równanie różniczkowe zwyczajne pozwalające wyliczać optymalne oczekiwane wypłaty

$$\frac{d}{du}(r(u)y(u)) = \lambda \cdot r(u) \cdot (y(u)G(y(u)) - H(y(u))). \tag{5}$$

Uwaga 2.1. Równanie (5) jest nieliniowym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, które rozwiązujemy numerycznie z warunkiem brzegowym

$$r(u)y(u) \to 0 \quad \text{gdy} \quad u \to U.$$

Następnie, korzystając z ciągłości funkcji $V(u), u \ge 0$, [patrz Siegmund (1967)] otrzymujemy $V(0) = \lim_{u \to 0} V(u)$.

Aby wyznaczyć średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania ciągu $Y_n r(\tau_n)$, potrzebujemy jeszcze wyznaczyć $f_0(v)$ dla $v \in [U,\infty)$. Zauważmy, że gdy $U = +\infty$, wówczas wzór (4) wyznacza ogon rozkładu zmiennej losowej $\tau_{\sigma(0)}$ dla dowolnego $v \in [0,\infty)$. W sytuacji gdy $U < \infty$, wzór (4) wyznacza ogon rozkładu zmiennej losowej $\tau_{\sigma(0)}$ tylko dla $v \in [0,U)$. Aby znaleźć rozkład zmiennej losowej $\tau_{\sigma(0)}$ dla $v \ge U$, zauważmy, że $f_0(v)$ jest funkcją ciągłą. Prawostronna ciągłość tej funkcji wynika z definicji dystrybuanty. Zatem wystarczy wykazać, że jest to również funkcja lewostronnie ciągła. W tym celu wykażemy, że jest to funkcja lewostronnie ciągła w v_0. Niech $v < v_0$, wówczas

$$0 \le f_0(v) - f_0(v_0) = P(\tau_{\sigma(0)} \in (v, v_0]) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_n \in (v, v_0], \sigma(0) = n)$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_n \in (v, v_0]) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_v^{v_0} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp(-\lambda x) dx$$

$$\le (v_0 - v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} {v_0}^{n-1} = (v_0 - v)\lambda \exp(v_0 \lambda).$$

Przyjmując $0 < v_0 - v < \delta < \frac{\varepsilon}{\lambda \exp(v_0 \lambda)}$, otrzymujemy, że $f_0(v) - f_0(v_0) < \varepsilon$. Z dowolności v_0 i prawostronnej ciągłości $f_0(v)$ otrzymujemy, że $f_0(v)$ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy teraz, że jeśli $v \geq U$, to $r(v) = 0$ i $V(v) = 0$, oraz dla $h > 0$ mamy

$$f_0(v+h) = P(\tau_{\sigma(0)} > v, N(v+h) - N(v) = 0) = f_0(v)\exp(-\lambda h) = f_0(v)(1 - \lambda h + o(h)),$$

gdzie $\lim_{h\to 0} h^{-1}o(h) = 0$. Przekształcając powyższą równość, otrzymujemy

$$\frac{f_0(v+h) - f_0(v)}{h} = (-\lambda + \frac{o(h)}{h}) f_0(v). \tag{6}$$

Analogicznie dla $v - h \geq U$ oraz $h > 0$ mamy

$$f_0(v) = P(\tau_{\sigma(0)} > v - h, N(v) - N(v-h) = 0) = f_0(v-h)(1 - \lambda h + o(h)),$$

a stąd

$$\frac{f_0(v-h) - f_0(v)}{-h} = (-\lambda + \frac{o(h)}{h}) f_0(v-h). \tag{7}$$

Przechodząc obustronnie do granicy przy $h \to 0^+$ w równaniach (6) oraz (7) i korzystając z ciągłości $f_0(v)$, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\frac{d}{dv} f_0(v)}{f_0(v)} = -\lambda.$$

Z równania (4) oraz ciągłości funkcji $f_0(v)$ dostajemy warunek początkowy, z którym należy rozwiązać powyższe równanie:

$$f_0(U) = \exp\left(-\int_0^U \lambda G(y(v'))dv'\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy dla $v \geq U$ ogon rozkładu zmiennej losowej $\tau_{\sigma(0)}$:

$$f_0(v) = \exp(-\lambda v + \lambda U - \int_0^U \lambda G(y(v'))dv').$$

Zatem

$$f_0(v) = \begin{cases} \exp(-\int_0^v \lambda G(y(v'))dv') & \text{dla} \quad 0 \leq v < U, \\ \exp(-\lambda v + \lambda U - \int_0^U \lambda G(y(v'))dv') & \text{dla} \quad v \geq U. \end{cases} \tag{8}$$

Średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania obliczamy z następującego wzoru

$$E(\tau_{\sigma(0)}) = \int_0^\infty P(\tau_{\sigma(0)} > v)dv = \int_0^\infty f_0(v)dv. \tag{9}$$

Aby wyznaczyć średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania, należy rozwiązać równanie (5), następnie znając funkcję $y(u)$, wyznaczyć z układu równań (8) ogon rozkładu zmiennej losowej $\tau_{\sigma(0)}$, po czym skorzystać ze wzoru (9).

3. Własności

W niniejszym rozdziale przedstawimy wpływ parametrów modelu na wysokość optymalnej oczekiwanej wypłaty. Będziemy zakładać, że są spełnione założenia z rozdziału 2.

Niech $V^{r_1}(u)$ i $V^{r_2}(u)$ oznaczają optymalne oczekiwane wypłaty w prezentowanym modelu z funkcjami dyskontującymi odpowiednio $r_1(u)$ i $r_2(u)$.

Twierdzenie 3.1. Niech $r_1(u) \geq r_2(u)$ dla każdego $u \in R$. Wówczas

$$V^{r_1}(u) \geq V^{r_2}(u).$$

Dowód. Z założenia twierdzenia otrzymujemy $Y_t r_1(u+\tau_t) \geq Y_t r_2(u+\tau_t)$ dla wszystkich momentów stopu $t \in T$. Zatem

$$\sup_{t\in T} E(Y_t r_1(u+\tau_t)) \geq \sup_{t\in T} E(Y_t r_2(u+\tau_t)). \tag{10}$$

Stąd $V^{r_1}(u) \geq V^{r_2}(u)$.

Uwaga 3.2. Przyjmując $u = 0$ w twierdzeniu 3.1 otrzymujemy

$$V^{r_1}(0) \geq V^{r_2}(0).$$

Niech $V^{r_1}(u)$ i $V^{r_2}(u)$ będą optymalnymi oczekiwanymi wypłatami w prezentowanym modelu, w którym oferty pojawiają się zgodnie z procesem Poissona z intensywnościami odpowiednio λ_1 i λ_2. Poniższe twierdzenie zostało udowodnione w pracy Ferenstein i Krasnosielskiej (2008b).

Twierdzenie 3.3. Załóżmy, że $\lambda_1 > \lambda_2$. Wówczas zachodzi następująca nierówność

$$V^{\lambda_1}(0) \geq V^{\lambda_2}(0).$$

Teza twierdzenia 3.3 jest intuicyjnie oczywista, ponieważ im większy jest parametr intensywności procesu Poissona, tym więcej ofert obserwujemy, a zatem wzrasta optymalna oczekiwana wypłata.

4. Przykłady

Załóżmy, że spełnione są założenia z rozdziału 2. Niech Y_1 będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Wówczas:

$$F(y(u)) = 1 - \exp(-y(u)),$$

$$G(y(u)) = \exp(-y(u)),$$

$$H(y(u)) = (y(u)+1)\cdot \exp(-y(u)).$$

Przykład 4.1. Niech $r(u) = 1$ dla $u \in [0,U)$, $U < \infty$, oraz $r(u) = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas równanie różniczkowe (5) przyjmuje następującą postać

$$\frac{dy(u)}{du} = -\lambda \exp(-y(u)).$$

Rozwiązując powyższe równanie z warunkiem brzegowym $y(U) = 0$, otrzymujemy

$$V(u) = y(u) = \ln(1 + \lambda(U - u)). \tag{11}$$

Zatem optymalna oczekiwana wypłata selekcjonera obserwującego ciąg wypłat $X_n = Y_n r(\tau_n)$ wynosi

$$V(0) = \lim_{u \to 0} V(u) = \ln(1 + \lambda U).$$

Zauważmy, że w tym przykładzie dla $u = 0$ optymalna oczekiwana wypłata zależy od wartości $\lambda \cdot U$, czyli od średniej liczby ofert, które zaobserwujemy do chwili U.

Wyznaczmy średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania. Z równania (11) otrzymujemy

$$G(y(v')) = \exp(-y(v')) = \frac{1}{1+\lambda(U-v')}.$$

Zatem

$$f_0(v) = \begin{cases} \dfrac{1+\lambda(U-v)}{1+\lambda(U)} & \text{dla} \quad 0 \le v < U, \\ \exp(-\lambda v + \lambda U - \ln(1+\lambda U)) & \text{dla} \quad v \ge U. \end{cases}$$

Korzystając z równania (9), otrzymujemy

$$E(\tau_{\sigma(0)}) = \int_0^\infty f_0(v)dv = \int_0^U \frac{1+\lambda(U-v)}{1+\lambda U} dv + \int_U^\infty \exp(-\lambda v + \lambda U - \ln(1+\lambda U))dv$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda} + U + \frac{\lambda}{2}U^2}{1+\lambda U}. \tag{12}$$

Uwaga 4.2. Zauważmy, że w tym przykładzie średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania jest funkcją zależną od parametrów λ oraz U. Dodatkowo, przy ustalonym U, funkcja ta jest malejąca ze względu na λ. Zatem, ze wzrostem parametru λ, przy ustalonym U, maleje średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania. Ponadto, przy ustalonym parametrze λ, średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania jest funkcją rosnącą ze względu na U. Zatem, ze wzrostem parametru U, przy ustalonym λ, rośnie średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania. Zauważmy dodatkowo, że dla dowolnych parametrów $\lambda > 0$ oraz $U > 0$ zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2}U \le E(\tau_{\sigma(0)}) \le \frac{1}{\lambda} + U.$$

Rozważając model bez funkcji dyskonta [dokładniej: model, w którym $r(u) = 1$ dla $u \in [0,U)$ oraz $r(u) = 0$ w przeciwnym przypadku], otrzymujemy

$$\lim_{U \to +\infty} V(0) = +\infty$$

oraz

$$\lim_{U \to +\infty} E(\tau_{\sigma(0)}) = +\infty.$$

W tabeli przedstawiono wysokość optymalnej oczekiwanej wypłaty oraz średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania w modelu opisanym w przykładzie 4.1 dla różnych wartości parametrów λ oraz U.

	$U = 10$	$U = 10$	$U = 10$	$U = 1$	$U = 10$	$U = 100$
	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 20$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$
$V(0)$	2,3979	4,61512	5,3033	0,69315	2,3979	4,61512
$E(\tau_{\sigma(0)})$	5,545459	5,05941	5,029855	1,25	5,545459	50,504951

Zauważmy, że wraz ze wzrostem intensywności, przy ustalonym parametrze U, wzrasta optymalna oczekiwana wypłata (zgodnie z twierdzeniem 3.3), a średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania maleje (uwaga 4.2). Natomiast wraz ze wzrostem parametru U, przy ustalonej intensywności pojawiania się ofert, rośnie zarówno optymalna oczekiwana wypłata, jak i średni czas oczekiwania na optymalny moment zatrzymania (uwaga 4.2). W tym przypadku wzrost optymalnej oczekiwanej wypłaty wynika z twierdzenia 3.1, gdyż weźmy $U_1 < U_2$ oraz $r_i(u) = 1$ dla $u \in [0,U)$ i 0 w przeciwnym przypadku, $i = 1,2$, wówczas $r_1(u) \le r_2(u)$. Zatem z twierdzenia mamy, że optymalna oczekiwana wypłata w modelu z parametrem U_2 jest nie mniejsza niż optymalna oczekiwana wypłata w modelu z parametrem U_1.

Rozważmy teraz następujący przykład.

Przykład 4.3. Założmy, że $r(u) = \exp(-\beta u)$ dla $u \in [0,U)$ oraz $r(u) = 0$ w przeciwnym przypadku. Wówczas równanie różniczkowe (5) przyjmuje postać

$$y'(u) = \beta y(u) - \lambda \exp(-y(u)). \tag{13}$$

Równanie (13) rozwiązujemy numerycznie z warunkiem brzegowym $y(U) = 0$.

W poniższej tabeli przedstawiono wysokość optymalnej oczekiwanej wypłaty $V(0)$ w modelu opisanym w przykładzie 4.3 dla różnych wartości parametrów λ, β oraz U.

$V(0)$	$U = 10$	$U = 10$	$U = 10$	$U = 1$	$U = 10$	$U = 100$
	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$	$\lambda = 20$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1$
$\beta = 0$	2,39789	4,61512	5,3033	0,69314	2,39789	4,61512
$\beta = 1$	0,56714	1,74551	2,20498	0,45869	0,56714	0,56714
$\beta = 2$	0,35173	1,3264	1,74549	0,3292	0,35173	0,35173
$\beta = 10$	0,09127	0,56709	0,85252	0,09127	0,09127	0,09127

Zauważmy, że wraz ze wzrostem parametru β optymalna oczekiwana wypłata maleje (zgodnie z twierdzeniem 3.1). Warto również zwrócić uwagę na fakt, iż w modelu z dyskontem (tzn. w modelu, w którym $\beta > 0$), przy ustalonej częstotliwości pojawiania się ofert, wraz ze wzrostem parametru U, optymalna oczekiwana wypłata stabilizuje się (patrz tabela: np. $\beta > 2$, $\lambda > 1$). To znaczy, że po pewnym czasie nie opłaca się już czekać, bo szanse na wyższą wypłatę maleją. Przyczyną tego zjawiska jest postać funkcji dyskontującej r: dla $\beta > 0$ i pewnego „dużego" U funkcja ta przyjmuje wartości bliskie 0.

5. Podsumowanie

W życiu codziennym ważne jest, by przy podejmowaniu decyzji nie kierować się tylko intuicją, bo bywa ona zawodna. Dlatego należy zdawać sobie sprawę, że przynajmniej część problemów można „zmatematyzować", a dzięki temu często otrzymać konkretne strategie postępowania. W niniejszej pracy przedstawiono optymalną strategię postępowania w wybranych problemach ekonomicznych, jak i społecznych. Przedstawiono i udowodniono intuicyjnie oczywiste własności tego modelu. Świadomość, że te intuicyjne własności mają potwierdzenie naukowe, sprawia, że podejmowanie decyzji w opisanych sytuacjach jest choć trochę łatwiejsze.

6. Podziękowania

Pragnę podziękować anonimowym recenzentom za pomocne komentarze i propozycje rozszerzenia bibliografii.

Bibliografia

Bearden, Neil J. 2006. *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs*. „Journal of Mathematical Psychology" 50: 58-59.

Bearden, Neil J., Ryan O. Murphy i Amnon Rapoport. 2005. *A multi-attribute extension of the secretary problem: Theory and experiments*. „Journal of Mathematical Psychology" 49: 410-422.

Bearden, Neil J., Ryan O. Murphy i Amnon Rapoport. 2006. *Experimental studies of sequential selection and assignment with relative ranks*. „Journal of Behavioral Decision Making" 19: 229-250.

Bruss, Thomas. F. 2005. *Jak przechytrzyć niepewność*. „Decyzje" 4: 61-68.

Chow, Y. S. Herbert Robbins i David Siegmund. 1971. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Cowan, Richard i Zabczyk Jerzy. 1978. *An optimal selection problem associated with the Poisson process*. „Theory of Probability and its Applications" 23: 584-592.

Elfving, Gustav. 1967. *A persistency problem connected with a point process*. „Journal of Applied Probability" 4: 77-89.

Ferguson, Thomas S. 1989. *Who solved the secretary problem?* „Statistical Science" 4: 282-296.

Ferenstein, Elżbieta Z. i Anna Krasnosielska. 2008a. *Nash equilibrium in a game version of Elfving problem*. Ukaże się w Annals of Dynamic Games.

Ferenstein, Elżbieta. Z. i Anna Krasnosielska. 2008b. *A version of Elfving optimal stopping time problem with random horizon*. Ukaże się w Game Theory and Applications 14, Nova Science Publishers, New York.

Ferenstein, Elżbieta. Z. i Andrzej Sierociński. 1997. *Optimal stopping of a risk process*. „Applicationes mathematicae" 24 (3): 335-342.

Samuel-Cahn, Ester. 2005. *When should you stop and what do you get? Some secretary problems*. Discussion Paper 407, Departament of Statistics, The Hebrew Uniwersity of Jerusalem, Jerusalem 91905, Israel, Feldman Building, Givat-Ram, 91904 Jerusalem, Israel, http://ratio.huji.ac.il/dp407.pdf, ukaże się w Sequential Analysis.

Samuels, Stephen M. 1991. *Secretary problems*. W: B.K. Gosh, P.K. Sen (red.) Handbook of Sequential Analysis. Marcel Dekker, New York, s. 381-405.

Seale, Darryl A. i Amnon Rapoport. 2000. *Optimal stopping behavior with relative ranks: the secretary problem with unknown population size*. „Journal of Behavioral Decision Making" 13: 391-411.

Siegmund, David O. 1967. *Some problems in the theory of optimal stopping*. „The Annals of Mathematical Statistics" 38: 1627-1640.

Stadje, Wolfgang. 1987. *An optimal k-stopping problem for the Poisson process*. W: P. Bauer, F. Konecny, W. Wetz, (red.) Proceedings of the 6th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Reidel, Dordrecht, B, s. 231-244.

Stadje, Wolfgang. 1990. *A full information pricing problem for the sale of several identical commodities*. „Mathematical Methods of Operations Research" 34: 161-181.

Stein, William E., Darryl A. Seale i Amnon Rapoport. 2003. *Analysis of heuristic solutions to the best choice problem*. „European Journal of Operational Research" 151: 140-152.

Szajowski, Krzysztof. 2006. *Optymalne postępowanie w problemie sekwencyjnej selekcji: teoria i praktyka*. „Decyzje" 5: 29-40.

Zwick, Rami, Amnon Rapoport, Alison King Lo i A.V. Muthukrishnan. 2003. *Consumer search: not enough or too much?* „Marketing Science" 22 (4): 503-519.