Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XXXIX (2006), 92–114

Anna Frąckowiak–Ciesielska
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki

U ŹRÓDEŁ WSPÓŁCZESNEGO NOMINALIZMU W FILOZOFII MATEMATYKI

Nominalizm jest jednym z najważniejszych nurtów we współczesnej filozofii matematyki. Celem niniejszego artykułu jest wskazanie tych koncepcji, poglądów oraz prac, które przyczyniły się do jego dynamicznego rozwoju. Przedstawimy w szczególności polskich prekursorów kierunku, a więc Leśniewskiego, Kotarbinskiego i Tarskiego. W dalszej kolejności skoncentrujemy się na artykule Quine'a i Goodmana *Steps Toward a Constructive Nominalism.* Stał się on swoistą deklaracją ideologiczną nominalizmu i zapoczątkował w nim tendencje rekonstrukcyjne. Prezentację zakończymy próbą modalnej interpretacji matematyki w ujęciu Putnama. Zainspirowała ona nominalistów do wzbogacenia dotychczasowej aparatury logicznej o nowe metody i narzędzia, skuteczniejsze w realizacji strategii nakreślonej przez Quine'a i Goodmana.

1. NOMINALIZM W SZKOLE LWOWSKO–WARSZAWSKIEJ

Atmosfera intelektualnej otwartości panująca w Szkole Lwowsko–Warszawskiej sprzyjała rozwijaniu różnorodnych zainteresowań jej przedstawicieli oraz powstawaniu rozmaitych, często opozycyjnych względem siebie, światopoglądów i koncepcji filozoficznych. W [1948, 17] Dąmbska pisze:

> Nie łączyła bowiem filozofów lwowskich jakaś wspólna doktryna, jakiś jednolity pogląd na świat. To, co stworzyło podstawę wspólnoty duchowej tych ludzi, to była nie treść nauki, tylko sposób, metoda filozofowania i wspólny język naukowy. Dlatego wyjść z tej szkoły mogli: spirytualiści i materialiści, nominaliści i realiści, logistycy i psychologowie, filozofowie przyrody i teoretycy sztuki.

Niewątpliwie najwybitniejszym przedstawicielem nominalizmu wśród członków szkoły był Stanisław Leśniewski. Przedmiot ogólny definiował on jako reprezentujący pewne inne obiekty, w odniesieniu do wszystkich i tylko tych własności, które są im wspólne. Rozważając własność P, którą niektóre spośród obiektów $A_1, A_2, A_3, \ldots$ posiadają a inne nie, Leśniewski doszedł do przekonania, że przedmioty ogólne nie mogą istnieć. Gdyby bowiem było przeciwnie, wówczas obiekt reprezentujący $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nie mógłby posiadać ani własności P, ani też własności $\neg P$[1]. Byłoby to sprzeczne z ontologiczną zasadą wyłączonego środka, zgodnie z którą dla wszystkich obiektów A i wszystkich własności P: A posiada P lub A posiada $\neg P$, gdzie $\neg P$ uzyskuje się z P za pomocą własności negacji[2]. Jeśli więc obiekt ma reprezentować inne obiekty bez popadania w sprzeczność, musi reprezentować co najwyżej samego siebie. Oznacza to ostatecznie, że przedmioty ogólne nie istnieją.

W powyższym rozumowaniu jest jednak — jak zauważa Guido Küng — jeden słaby punkt. Leśniewski zakłada mianowicie, że przedmiot ogólny posiada wszystkie i tylko te własności, które

[1] W szczególności, trójkąt w sensie ogólnym nie mógłby być ani równoboczny, ani też nie-równoboczny.

[2] Leśniewski, głównie w swoich wczesnych pracach, był skłonny rozróżniać zasadę ontologiczną od logicznej. W myśl tej drugiej, odrzucanej przez niego, dla każdego p: p lub $\neg p$. Dokładniejsze omówienie tego zagadnienia można znaleźć w Simons [1993].

są wspólne wszystkim reprezentowanym przez niego indywiduom. Tymczasem można oczekiwać, że przedmiot ogólny posiada cechy charakterystyczne tylko dla niego, takie jak bycie obiektem abstrakcyjnym, czy też posiadanie więcej niż jednego ucieleśnienia. Widać stąd, iż argumentacja Leśniewskiego jest skuteczna tylko w odniesieniu do pewnej definicji bytu abstrakcyjnego i zawodzi w każdym innym przypadku[3]. Niemniej jednak jej struktura ujawnia zasadnicze problemy realizmu: czym są obiekty abstrakcyjne? czy możemy zaakceptować ich istnienie, skoro są one nieokreślone w odniesieniu do pewnych własności i określone w stosunku do innych? jeśli tak, to jaki charakter ma to istnienie?

Dowód nieistnienia przedmiotów ogólnych Leśniewski sformułował w 1912 roku i powtarzał wielokrotnie[4]. Niezależnie od jego formalnej poprawności, autor głęboko wierzył w słuszność stanowiska nominalistycznego, a swoje systemy budował konsekwentnie w zgodzie z jego podstawowymi założeniami. Wyrażenia pojmował nie jako typy (*expression types*), ale jako konkretne skończone ciągi napisów (*expression tokens*): dwa równokształtne wyrażenia zapisane w dwóch różnych miejscach, były dla niego dwoma odmiennymi wyrażeniami. Pojedyncze napisy były dlań skończonymi czasoprzestrzennymi obiektami stworzonymi w konkretnym miejscu i czasie. Każdy składał się ze skończonej liczby słów, które z kolei zawierały co najwyżej skończoną liczbę liter, liczebników i innych symboli, odznaczających się pewnym czasoprzestrzennym „śladem”. Leśniewski uważał, że wyrażenie istnieje o tyle, o ile zostało skonstruowane z wcześniej istniejących napisów lub też jest nowym napisem, zbudowanym stosownie do obowiązujących reguł ich tworzenia. Tezami systemów Leśniewskiego są wyłącznie konkretne indywidualne wyrażenia, ponieważ tylko one mogą należeć

[3]Wnikliwą analizę problemu przedstawia Küng w [1967].

[4]Woleński w [2000] podkreśla, że nominalizm był jedynym poglądem, który Leśniewski wyznawał zdecydowanie.

do określonych kategorii semantycznych i być nośnikami stałego znaczenia[5].

Wyrazem zreferowanego wyżej poglądu, nazwanego później w literaturze konstruktywnym nominalizmem, była w pierwszej kolejności teoria kategorii semantycznych, stworzona jako równoważnik prostej teorii typów Leona Chwistka[6]. Skomplikowana rozgałęziona teoria typów Russella, nie odpowiadała Leśniewskiemu głównie ze względu na dopuszczanie takich bytów abstrakcyjnych, jak zbiory, relacje czy własności indywiduów. Teoria kategorii semantycznych miała być naturalnym uogólnieniem gramatycznego podziału wyrażeń na części mowy. W myśl koncepcji autora, każde wyrażenie należy do jednej i tylko jednej kategorii semantycznej; jeśli dwa równokształtne wyrażenia języka potocznego należą do różnych kategorii (np. „lub" w zdaniu „Piotr lub Paweł" oraz „lub" w zdaniu „p lub q"), wówczas kontekst rozstrzyga jednoznacznie, o jaką kategorię chodzi.

Konstruktywny nominalizm zadecydował o pewnym specyficznym rozumieniu systemów dedukcyjnych. Zostały one pomyślane jako rosnące organizmy, które niczym naturalne języki mogą rozwijać się nieograniczenie, będąc jednak na każdym etapie rozwoju skończonymi. Możliwość ich wzbogacania o nowe twierdzenia i nowe kategorie semantyczne wyrażeń, skłoniła Leśniewskiego do szczegółowego opracowania zasad konstrukcji jego systemów. Reguły te zostały sformułowane w sposób czysto strukturalny, tj. odnosiły się wyłącznie do kształtu wyrażeń a nie do ich sensu. Miały one kontrolować rozbudowę systemów, czyli sprawdzać poprawność kolejnych kroków rozszerzających je[7]. Zbiór tez nie mógł być jednoznacznie zdeterminowany przez reguły i aksjomaty: cho-

[5]Szczegółową, zarówno pod względem formalnym, jak i technicznym, analizę wszystkich systemów Leśniewskiego zawiera Luschei [1962].

[6]Mimo iż teoria kategorii semantycznych może być uznawana za semantyczny odpowiednik prostej teorii typów, obie teorie są jednak różne: pierwsza ma charakter semantyczny, druga zaś ontologiczny.

[7]Dodajmy, że Leśniewski rozumiał definicje jako tezy systemu, a także dopuszczał ich twórczą rolę w systemach dedukcyjnych.

ciaż zarówno one, jak i wyprowadzane z nich twierdzenia istnieją aktualnie, to cały system istnieje jedynie potencjalnie.

Prototetyka, ontologia i mereologia miały stanowić wystarczającą bazę dla matematyki. W tym sensie zamierzenia Leśniewskiego były zbieżne z intencjami logicystów, w szczególności Fregego, Russella i Whiteheada. Istotnie, prototetyka i ontologia mogą spełniać te funkcje, które normalnie spełniają rachunek zdań i rachunek predykatów. Prototetyka jest systemem mocniejszym od rachunku zdań ze zmiennymi funktorami (który może być utożsamiany z prototetyką elementarną), gdyż jej kwantyfikatory wiążą zmienne kategorii semantycznych. Można z niej wyprowadzić, przy użyciu jednego aksjomatu, wszystkie prawa standardowego rachunku zdań oraz zasady ekstensjonalności i dwuwartościowości. W tym sensie prototetyka ma charakter absolutny i można ją uznać za najbardziej adekwatną reprezentację klasycznej logiki zdań. Z uwagi na fizykalistyczną interpretację wyrażeń, dwie wersje prototetyki — jedna oparta na implikacji, druga zaś na równoważności — są całkowicie odmiennymi systemami logicznymi, mimo ich wzajemnej przekładalności i równoważności. Co więcej, dwa izomorficzne systemy z dokładnością do równokształtności formuł nie są tymi samymi obiektami.

Ontologia nie ma tak prostego odpowiednika w istniejących i powszechnie stosowanych systemach logicznych. Mimo iż określa się ją najczęściej jako rachunek nazw, nie można zapominać, że pełni ona szereg funkcji realizowanych przez standardowy rachunek kwantyfikatorów. W założeniach Leśniewskiego ontologia miała rzeczywiście stanowić rachunek nazw z funktorem „jest” jako pierwotnym (stąd nazwa systemu). Ze względu na definicje istnienia i przedmiotu[8], ontologia jest „metafizycznie neutralna”, tzn. jej tezy nie uprawniają nas do twierdzenia, że coś istnieje i co konkretnie istnieje. W konsekwencji nie możemy wykluczyć

[8]Dla każdego A, A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego x, x jest A; dla każdego A, A jest przedmiotem wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego x, A jest x.

istnienia bytów abstrakcyjnych, a więc i klasycznej teorii mnogości[9].

Mereologia w pełni oddaje nominalistyczne intuicje Leśniewskiego, gdyż jest teorią zbiorów w sensie kolektywnym. Powstała najwcześniej, bo jeszcze przed prototetyką i ontologią, jednak później była wielokrotnie udoskonalana, szczególnie w zakresie aksjomatyki. Zbiór w sensie mereologicznym jest rozumiany jako kolektyw, agregat, pewna całość, a więc konkretny obiekt fizyczny składający się z części. Wynika z tego, że zbiór jednoelementowy jest identyczny ze swoim elementem oraz że nie ma zbiorów pustych[10]. Relacja bycia elementem jest przechodnia dla zbiorów w sensie mereologicznym, ale zasadniczo nieprzechodnia dla zbiorów dystrybutywnych. Jedynym terminem pierwotnym mereologii jest stała „być częścią". Za jej pomocą Leśniewski formułuje aksjomatykę systemu[11] i definiuje podstawowe pojęcia: elementu i klasy. Otóż, A jest elementem B wtedy i tylko wtedy, gdy A jest tym samym przedmiotem co B lub A jest częścią B; A jest klasą przedmiotów a wtedy i tylko wtedy, gdy (a) A jest przedmiotem, (b) dla każdego B, jeżeli B jest a, to B jest elementem A, (c) dla każdego B, jeżeli B jest elementem A, to pewien element B jest elementem pewnego a.

W odróżnieniu od ontologii, mereologiczne aksjomaty i definicje nie dopuszczają jakiejkolwiek realistycznej interpretacji, gdyż zakładają istnienie wyłącznie indywiduów. Co więcej, na gruncie ogólnej teorii mnogości (tak Leśniewski nazywał mereologię)

---

[9] Ontologia jest systemem niezwykle ciekawym, jednak zważywszy na cel niniejszych rozważań nie poświęcimy jej więcej uwagi. Więcej na ten temat znaleźć można w Słupecki [1955], Lejewski [1958] oraz Simons [1982].

[10] W systemach Leśniewskiego definiowalna jest jednak stała, umożliwiająca wyartykułowanie tego faktu. Konstruowalność obiektów abstrakcyjnych na gruncie dystrybutywnej teorii mnogości, np. zbioru pustego jako iloczynu zbiorów rozłącznych, była powodem dla którego Leśniewski mereologiczne ujęcie zbioru uważał za zdecydowanie bardziej intuicyjne. Oskarżał nawet na tej podstawie matematyków o tworzenie rzeczy, które nie istnieją (por. Leśniewski [1927]).

[11] Oryginalną aksjomatykę ontologii odnajdujemy w Leśniewski [1930, 78].

nie powstaje w ogóle antynomia Russella: ze znaczenia terminów „klasa” i „element” jasno wynika, że nie ma klas, które nie są własnymi elementami.

Wspomnieliśmy wcześniej, że prototetyka i ontologia spełniają te zadania, które zwyczajowo przypisuje się rachunkowi zdań i rachunkowi predykatów. Niestety mereologia jest za słabą teorią mnogości, aby można było przy jej pomocy zrekonstruować całą matematykę. Nie oznacza to jednak nierealizowalności zamierzeń Leśniewskiego — teorię mnogości daje się bowiem zbudować wprost z ontologii, która nie wyklucza dystrybutywnego pojęcia zbioru. Logikę Leśniewskiego można zinterpretować jako rachunek kwantyfikatorów omega-stopnia, co pozwala na dołączenie silnych aksjomatów teorii mnogości, w szczególności aksjomatu wyboru[12]. W takim przypadku mereologia staje się (zapewne wbrew zamierzeniom autora) zupełnie odrębną teorią, rozwijaną niezależnie od prób rekonstrukcji matematyki, np. jako geometria brył.

Systemy Leśniewskigo, w szczególności ontologia i w mniejszym stopniu mereologia, odegrały bardzo istotną rolę w rozwoju reizmu Kotarbińskiego, będącego badaj jedyną globalną koncepcją filozoficzną powstałą w Szkole Lwowsko–Warszawskiej. Za autorem rozróżnia się reizm w sensie ontologicznym i reizm w sensie semantycznym. Pierwszy, dostarczając odpowiedzi na pytanie co istnieje, głosi, że każdy przedmiot jest rzeczą, czyli indywidualnym, materialnym, rozciągłym obiektem oraz że żaden przedmiot nie jest stanem, stosunkiem lub cechą[13]. Drugi jest doktryną odnoszącą się do nazw oraz sensowności zdań i opiera się na rozróżnieniu nazw rzetelnych (nazw rzeczy) oraz nazw pozornych (nazw stanów, stosunków i cech). Wypowiedź zdaniowa jest sen-

[12] Por. Davis [1975].

[13] Reizm nawiązuje do problemu ilości kategorii ontologicznych postawionego jeszcze przez Arystotelesa, a uproszczonego później przez Wundta. O ile wykaz Arystotelesa zawierał jednoelementową klasę substancji pierwszych oraz aż dziewięć kategorii substancji wtórnych (wielkość, jakość, stosunek, miejsce, czas, położenie, stan, działanie i doznawanie), o tyle lista Wundta wyróżniała już wyłącznie rzeczy, cechy, stany i stosunki.

sowna wtedy i tylko wtedy, gdy obok funktorów zawiera wyłącznie nazwy rzeczy lub też da się zredukować do wypowiedzi zawierającej wyłącznie nazwy rzetelne jako wyrażenia nominalne; wypowiedzi podlegające takiej redukcji nazywa Kotarbiński skrótowozastępczymi. Ostatecznie więc reizm ontologiczny odrzuca istnienie jakichkolwiek przedmiotów ogólnych, zaś reizm semantyczny postuluje pewien charakter języka, w jakim o tak pojmowanym świecie należy się wypowiadać.

Reizm został nadbudowany nad ontologią Leśniewskiego, która stanowiła dlań zbiór doskonałych narzędzi formalnologicznych. W [1961, 430] Kotarbiński pisał:

> Czyż mogło być dla konkretyzmu korzystniejsze zdarzenie niż spotkanie na swoim gościńcu rozwojowym przewodniczki w postaci *Ontologii* Leśniewskiego [...] Otóż reizm wygrał wielki los, natknąwszy się na znakomity wynalazek w postaci *Ontologii*.

Kotarbiński przede wszystkim przejął za Leśniewskim jednokategorialną koncepcję nazw, zgodnie z którą nazwy są wyrażeniami mogącymi pełnić rolę orzeczników w zdaniach typu „A jest B", przy zasadniczym rozumieniu funktora „jest"[14]. Odpowiada on dość precyzyjnie znaczeniu „jest" w zdaniu „Sokrates jest człowiekiem", ale nie ma nic wspólnego z „jest" w zdaniu „Jest prawda". Nie ma żadnych odniesień czasowo — przestrzennych oraz nie wskazuje na przynależność elementu do zbioru (choć jak wskazywaliśmy wcześniej, teoriomnogościowa interpretacja ontologii jest możliwa). Należy też wyraźnie odróżnić ontologiczne „jest" od „jest" stanowiącego jedynie część funktora „każdy jest", np. „Każdy człowiek jest śmiertelny"[15].

---

[14] Jednokategorialna koncepcja nazw Leśniewskiego–Kotarbińskiego zakłada więc, że odpowiednikiem nazwy jest substancja, nie zaś atrybut i przez to likwiduje rozdźwięk pomiędzy nazwami mogącymi być podmiotami i nazwami mogącymi być orzecznikami.

[15] Powyższe uwagi dostarczają jedynie pewnych intuicji związanych ze stałą logiczną „jest", której ścisłe znaczenie jest pochodną aksjomatów. Ich orygi-

Dobrodziejstwo systemów Leśniewskiego dla reizmu przejawia się również i w innej kwestii. Żaden filozof, a tym bardziej nominalista, nie może pozostać obojętny wobec pytania, czym są denotacje nazw ogólnych. Wedle zwyczajowej interpretacji oznaczają one własności, czyli klasy i nie mogą odnosić się do obiektów indywidualnych. Komentarze autora w związku z niniejszym problemem sugerują uznanie ontologii za teorię imion pospolitych: jeśli A jest nazwą jednostkową, a B jest nazwą ogólną (imieniem pospolitym), to w zdaniu „A jest B" przedmiot oznaczany przez podmiot, jest także przedmiotem oznaczanym przez orzecznik — o ile zdanie to jest prawdziwe[16]. Rozwiązanie to stanowi swego rodzaju konstrukcję wielokrotnej denotacji, gdyż dzięki niemu możemy stwierdzić, że „x jest N-em" bez konieczności zakładania istnienia przedmiotu ogólnego N. Ostatecznie więc powiadając, że „Sokrates jest człowiekiem" nie twierdzimy, że Sokrates należy do zbioru ludzi, ale raczej że jest jednym z ludzi lub inaczej: nazwa „Sokrates" i nazwa „człowiek" stosują się do pewnego przedmiotu.

Powyższa interpretacja nazw ogólnych umożliwia swobodne operowanie pojęciem zbioru dystrybutywnego, bez potrzeby postulowania, że istnieje coś poza indywiduami. Na przykład zdanie „Zbiór M zawiera się w zbiorze N" przetłumaczone na język reistyczny ma postać: „Dla każdego a, jeśli a jest M-em, to a jest N-em". Poprzez taki przekład Kotarbiński deklaruje, że w języku reistycznym kwantyfikacja odbywa się wyłącznie po zmiennych indywiduowych, przy ustalonym rozumieniu indywiduów jako ciał. Niestety reista nie potrafi rozszerzyć swojej teorii mnogości do zbiorów coraz to bardziej skomplikowanych, a więc do rodzin zbiorów, zbiorów relacji etc. W szczególności nie nasuwa się żadna reistyczna parafraza twierdzeń o liczbach kardynalnych nieosiągalnych, czy też (matematycznie niezwykle ważnego) ak-

---

nalną wersję znaleźć można w Kotarbiński [1961, 190–191], natomiast słowną transkrypcję i opracowanie w Woleński [1984] i [1986].

[16]Taką interpretację sugeruje Simons w [1982].

sjomatu wyboru. Generalnie możliwości reizmu kończą się na algebrze zbiorów, a to bardzo niewiele. Dodajmy ponadto, że we współczesnych formalizacjach teorii mnogości zmienne indywiduowe reprezentują zbiory — nie rozróżnia się zatem zbiorów i ich elementów (atomów) nie będących zbiorami. W takich ujęciach reizm napotyka trudności już na samym wstępie, ponieważ nie może zakładać redukcji teorii mnogości do języka zawierającego zmienne reprezentujące indywidua rozumiane konkretystycznie[17].

Zauważmy na koniec jeszcze, że kłopoty konkretyzmu wynikające z radykalnego ograniczania ontologii świata nie kończą się na samej matematyce. Kotarbiński budował swoją ontologię na bazie materii korpuskularnej, definiując ciała jako bezwładne i rozciągłe bryły, składające się z innych brył, podczas gdy współczesna fizyka podkreśla raczej polowy obraz świata. Wątpliwości o zupełnie innym charakterze powstają na gruncie humanistyki. Sprowadzają się one do pytania o reistyczny opis dzieła sztuki, systemu prawnego, procesu uczenia się języka etc. Wydaje się, iż o ile wyeliminowanie pierwszej trudności nie powinno stanowić dla reisty szczególnego problemu, gdyż wymaga jedynie uzgodnienia pojęcia konkretu z teorią fizyczną, o tyle usunięcie pozostałych doprowadziłoby do liberalizacji koncepcji, zapewne przekraczającej intencje autora.

Poglądy filozoficzne Leśniewskiego i Kotarbinskiego nie mogły pozostać bez wpływu na ich uczniów, wśród których najwybitniejszym był Alfred Tarski. Przypisywanie temu ostatniemu nominalizmu wydaje się być nieco dziwne, szczególnie w świetle publikowanych przez niego prac. W żadnym jego artykule nie znajdziemy jakiejkolwiek pozamatematycznej próby interpretacji uzyskanego wyniku. Nie oznacza to jednak, że Tarski swoje stanowisko w sporze o uniwersalia ukrywał. W [1988, 81] Suppes pisze:

[17]W [1985] Woleński zauważa, że analogiczne problemy napotka reista nie tylko w samej teorii mnogości, ale i wszędzie tam, gdzie jej metody są stosowane, m.in. w metamatematyce.

> Na podstawie licznych publikacji w zakresie teorii mnogości, moglibyśmy oczekiwać, że [Tarski] był platonikiem [...] — zgodnie z moją wiedzą nigdy nie odniósł się do tej kwestii na piśmie. Ale oczywiście podczas dyskusji często wyrażał sceptycyzm wobec platonizmu i przedstawiał poglądy, które byłyby zbieżne z formalizmem w filozofii matematyki i nominalizmem w filozofii w ogóle.

Swoje wyraźne sympatie w kierunku nominalizmu Tarski wyrażał nie tylko przy okazji nieformalnych rozmów ze studentami i współpracownikami, ale również na forum publicznym. Zachowały się dowody na to, że niejednokrotnie tłumaczył się z rozdźwięku pomiędzy praktyką naukową i stanowiskiem filozoficznym[18]. Podczas uroczystości związanej z jego siedemdziesiątymi urodzinami, powiedział:

> Jestem nominalistą. To jest bardzo głębokie moje przekonanie. Tak głębokie, że nawet w swoim trzecim wcieleniu, nadal będę nominalistą. [...] Wierzę, że nawet w bajkach tkwi wartość. [Jestem] udręczonym nominalistą.

Przewodnicząc wiosną 1965 roku, wspólnemu posiedzeniu Association for Symbolic Logic i American Philosophical Association, Tarski wygłosił bardzo znamienne zdanie:

> Reprezentuję ten bardzo surowy, naiwny rodzaj antyplatonizmu, który określiłbym jako materializm, lub nominalizm z pewną materialistyczną skazą, i bardzo trudno jest człowiekowi żyć z taką filozoficzną postawą, szczególnie jeśli jest on matematykiem, szczególnie jeśli z pewnych względów ma hobby, którym jest teoria mnogości.

Powyższy cytat może być dowodem na to, że nawet Leśniewski nie miał tak radykalnych poglądów jak Tarski. O ile pierwszy wyraźnie dystansował się wobec reizmu, jako odrzucającego istnienie

[18]Wspomniane dowody mają postać nagrań oryginalnych przemówień, bądź wystąpień Tarskiego. Zacytowane fragmenty pochodzą z Murawski, Woleński (w druku); opublikowano je również w Feferman, Feferman [2004, 52].

obiektów naszej wyobraźni i snów, o tyle drugi częściej identyfikował się z Kotarbińskim, niż mu zaprzeczał. Świadectwem tego jest choćby stanowisko Henryka Hiża, również sympatyka reizmu. Odmienne zdanie w tej kwestii miał Andrzej Mostowski, według którego Tarski nigdy nie akceptował reizmu, a tylko skłaniał się ku niemu w swych początkowych pracach[19].

Niezależnie od tego, jak bardzo skrajny był nominalizm Tarskiego, jedna rzecz nie ulega wątpliwości i wymaga podkreślenia — jest nią mianowicie dysonans między światopoglądem filozoficznym a praktyką matematyczną. Rzecz staje się bardziej zrozumiała, jeśli weźmie się pod uwagę atmosferę intelektualnej otwartości, charakteryzującą Szkołę Lwowsko–Warszawską. Przejawiała się ona przede wszystkim w postulowaniu dopuszczalności wszelkich poprawnych metod, skutecznych w rozwiązywaniu konkretnych problemów. Poglądy filozoficzne postrzegano wyłącznie jako „sprawę prywatną", która nie powinna przeszkadzać w działalności naukowej. Na tym tle postawa Tarskiego była w jakimś sensie reprezentatywna dla szkoły.

2. POCZĄTKI NOMINALIZMU REKONSTRUKCYJNEGO

W latach trzydziestych ubiegłego wieku Szkoła Lwowsko–Warszawska zyskała międzynarodową renomę, głównie za sprawą osiągnięć w zakresie logiki. Poszczególni jej przedstawiciele współpracowali z Kołem Wiedeńskim, dzieląc z jego członkami wiele przekonań: racjonalizm, negatywną postawę wobec spekulacji filozoficznej, niekiedy fizykalizm (w postaci reizmu) oraz, przede wszystkim, zainteresowanie logiką[20]. Nie może więc dziwić fakt, że przebywając wiosną 1933 roku w Europie, młody doktor fi-

[19]Na słowa Hiża powołuje się Simons w [1993], zaś opinię Mostowskiego odnajdujemy w Mostowski [1967].

[20]W połowie lat trzydziestych szeroko rozpowszechnił się pogląd o wręcz neopozytywistycznym charakterze szkoły. Stereotyp ten był jednak fałszywy, o czym skutecznie przekonuje Woleński w [1985].

lozofii Willard Van Orman Quine, odwiedził nie tylko Wiedeń i Pragę, ale również Warszawę. Przyjęty został z życzliwością, a Tarski, Leśniewski i Łukasiewicz urzekli go swoją gościnnością. Wielogodzinne dyskusje, seminaria i studia nad poszczególnymi zagadnieniami, nie mogły pozostać bez wpływu na poglądy dojrzewającego filozofa. Po latach w liście do Tarskiego pisał:

> Od *Principia Mathematica* logika w Ameryce, tak jak i w Anglii, znajdowała się w punkcie zerowym. Na kontynencie europejskim rozkwitała. Polska była w czołówce, a ty [...] byłeś już wiodącym polskim logikiem. [...] sześć tygodni twoich seminariów, naszych wspólnych rozmów i opublikowanych przez ciebie artykułów, a wyjeżdżałem będąc szczęśliwszym i mądrzejszym człowiekiem[21].

Wyraźne inspiracje ideami Leśniewskiego, w szczególności mereologią, uwidoczniły się w kilku mniej znanych artykułach Quine'a napisanych tuż po powrocie do Stanów. Wydaje się jednak, że prawdziwie nominalistyczny epizod w jego karierze naukowej, zapoczątkowały dyskusje z Tarskim i Carnapem prowadzone na Uniwersytecie Harvarda w roku akademickim 1940–1941. Koncentrowały się one przede wszystkim na programie budowy finitystycznego języka tak dla matematyki, jak i nauki w ogóle[22]. Zaowocowały one artykułem, napisanym wspólnie z Nelsonem Goodmanem, *Steps Toward a Constructive Nominalism.*

Autorzy deklarują tu całkowite odrzucenie obiektów abstrakcyjnych a każdy system, który nie czyni zadość temu żądaniu, uznają za niesatysfakcjonujący:

> Nikt nie sądzi, że byty abstrakcyjne — klasy, relacje, własności, etc. – istnieją w czasoprzestrzeni; ale my mamy na

[21] Fragment pochodzi z listu opublikowanego w Feferman, Feferman [2004, 87].

[22] We wspomnianych dyskusjach niejednokrotnie uczestniczyli nie tylko Quine, Carnap i Tarski, ale czasem również Russell i Goodman. Więcej szczegółów na ten temat znaleźć można w Mancosu [2005].

> myśli coś więcej. My odrzucamy je całkowicie. [...] ta negacja oparta jest na filozoficznej intuicji, która nie może być usprawiedliwiona przez odwołanie się do czegokolwiek bardziej fundamentalnego[23].

Przywołanie intuicji nie oznacza jednak, iż pewne rozważania *a posteriori* nie przekonują o słuszności stanowiska nominalistycznego. Zasada abstrakcji prowadzi do paradoksów (w tym do paradoksu Russella), a ich uniknięcie wymaga wprowadzenia reguł, których sztuczność i arbitralność względem faktycznego stanu świata, budzi poważne wątpliwości metodologiczne[24].

Konsekwencją wyrzeczenia się obiektów abstrakcyjnych jest zanegowanie jakiejkolwiek nieskończoności. Nie tylko bowiem nasze osobiste doświadczenia są skończone, ale również nie ma zgody wśród fizyków odnośnie tego, czy obiektów fizycznych może być więcej niż tylko skończona liczba. Zakładając więc, że nasz świat jest skończony, akceptacja nieskończoności oznaczałaby istnienie nieskończenie wielu bytów abstrakcyjnych, co przeczyłoby nominalizmowi. Niestety już bardzo proste teorie matematyczne posiadają nieskończone uniwersa, stąd ich „konkretyzacja” pociągałaby za sobą ich drastyczne zubożenie. W przypadku arytmetyki klasycznej byłoby to równoznaczne z koniecznością znalezienia fizycznych odpowiedników dla liczb[25]. Takie sugestie padały podczas wspominanych już rozmów prowadzonych w latach 1940–1941, jednak Quine i Goodman wybrali inne rozwiązanie.

Ograniczając ontologię teorii matematycznych wyłącznie do obiektów konkretnych, niezbędne jest dokonanie istotnych modyfikacji w zakresie języka. Nie może on zawierać żadnych predy-

[23]Cytat pochodzi z Goodman, Quine [1947, 105].

[24]Przykładami reguł pozwalających na „normalne” uprawianie matematyki w ramach rozgałęzionej teorii typów są aksjomaty sprowadzalności i nieskończoności (por. Murawski [2001]).

[25]Z uwagi na operację konkatenacji, nie możemy też postulować nieskończonego świata wyrażeń językowych. W przeciwnym wypadku musielibyśmy każde wyrażenie „znaleźć” w konkretnym świecie, co oczywiście nie jest wykonalne.

katów, definicji oraz twierdzeń, które w jakikolwiek sposób odnosiłyby się do bytów abstrakcyjnych. Zadaniem nominalisty jest więc przetłumaczenie wypowiedzi, w których występują „niedozwolone” odwołania, na takie, które są od nich wolne. W wielu przypadkach przeprowadzenie takiej translacji nie nastręcza żadnych trudności. Na przykład zdanie: „Klasa A jest zawarta w pewnej klasie różnej od A”, wydaje się postulować istnienie pewnego obiektu abstrakcyjnego, podczas gdy proste przeformułowanie prowadzi do jego nominalistycznego równoważnika postaci: „Pewien obiekt nie jest A”[26].

Quine i Goodman zauważają jednak, iż nie mamy żadnej gwarancji wykonalności postulowanej redukcji dla wszystkich twierdzeń, których nie bylibyśmy skłonni odrzucić jako nieznaczących. Ich pomysł, zaczerpnięty z prac Leśniewskiego, polega na traktowaniu zdań matematyki jedynie jako ciągów znaków pozbawionych znaczenia. Jego realizacja wymaga w pierwszej kolejności rozwinięcia języka przedmiotowego (*object language*) traktującego wyrażenia matematyczne jako konkretne obiekty i nie dopuszczającego żadnych narzędzi, które mogłyby odsyłać do bytów abstrakcyjnych. Zadanie to jest nader skomplikowane, gdyż wymaga całkiem nowego podejścia do definicji nawet tak podstawowych pojęć, jak „formuła”, „twierdzenie”, czy „operacja podstawienia”. Formalizację języka autorzy rozpoczynają od zidentyfikowania dziewięciu podstawowych predykatów: $\ulcorner Vee(x) \urcorner$ (obiekt x jest zmienną), $\ulcorner Ac(x) \urcorner$ (przedmiot x jest apostrofem), $\ulcorner LPar(x) \urcorner$ (x jest lewostronnym następnikiem), $\ulcorner RPar(x) \urcorner$ (x jest prawostronnym następnikiem), $\ulcorner Str(x) \urcorner$ (x jest znakiem dysjunkcji — kreską), $\ulcorner Ep(x) \urcorner$ (x jest znakiem przynależności elementu do całości — epsilonem), $\ulcorner C(xyz) \urcorner$ (napis x składa się z napisu z poprzedzonego napisem y — predykat konkatenacji), $\ulcorner Part(xy) \urcorner$ (x jest częścią y) oraz $\ulcorner Bgr(xy) \urcorner$ (x jest przestrzennie większy niż y). Tworzą one wraz ze zmiennymi, kwantyfikatorami oraz

[26]Wiele przykładów takiej translacji znaleźć można w paragrafie 4 omawianego artykułu.

spójnikami logicznymi koniunkcji i alternatywy, nominalistyczną składnię języka. Wartościami dla zmiennych mogą być dowolne konkretne obiekty. Następnym krokiem jest wprowadzenie przy pomocy powyższych predykatów pewnych pomocniczych definicji i dalej określenie adekwatnych aksjomatów (dla dysjunkcji, kwantyfikacji i przynależności) oraz reguł wnioskowania. Twierdzeniem systemu w rekonstruowanym języku przedmiotowym jest dowolny napis posiadający dowód; dowód natomiast składa się z ciągu następujących po sobie linii, z których każda jest albo aksjomatem albo konsekwencją poprzednich linii[27].

Scharakteryzowana powyżej składnia umożliwia nam uporanie się z formułami, dla których nie dysponujemy bezpośrednią translacją nominalistyczną. Jeśli np. formuła postaci: $\ulcorner \forall n(n+n = 2n) \urcorner$, zawierająca zmienne odnoszące się do bytów abstrakcyjnych, nie może być przetłumaczona na język nominalistyczny, wówczas rozwiązaniem jest potraktowanie jej po prostu jako łańcucha znaków. Dzięki temu jesteśmy w stanie stwierdzić, czy jest ona istotnie poprawną formułą naszego języka przedmiotowego i ewentualnie określić, jakie ma konsekwencje dla pozostałych formuł. W ten sposób posługiwanie się znaczną częścią klasycznej logiki i matematyki nie wymaga wgłębiania się w zagadnienia związane ze zrozumieniem i prawdziwością formuł, z którymi pracujemy. Quine i Goodman ujmują to w następujących słowach:

> Nikt, nie tylko najbardziej zagorzały pragmatyk, nie jest skłonny traktować koralików na abaku jako prawdziwych; i nasze stanowisko jest takie, że formuły platońskiej matematyki są, niczym koraliki na abaku, dogodnym narzędziem rachunkowym nie angażującym pojęcia prawdy. Tym co jest ważne i prawdziwe [...] jest nie aparatura jako taka, ale tylko jej opis: reguły, zgodnie z którymi jest ona konstruowana i stosowana[28].

[27] Nie wchodzimy w tym miejscu w szczegóły techniczne całościowej formalizacji, które w artykule Quine'a i Goodmana zajmują paragrafy 5–10.

[28] Por. Goodman, Quine [1947, 122].

Zaproponowane przez autorów traktowanie formuł matematycznych tylko jako ciągów znaków w ramach pewnego sformalizowanego systemu ma niestety pewną wadę, mianowicie nie wyjaśnia dostatecznie fenomenu stosowalności matematyki do opisu świata. Autorzy wydają się być świadomi tego faktu i być może właśnie z tego powodu w ostatnim akapicie wzywają do poszukiwania, w miarę możliwości, bezpośrednich przekładów coraz to bardziej skomplikowanych twierdzeń matematycznych na język nominalistyczny.

3. DUALIZM OBIEKTOWO-MODALNY

W artykule *Mathematics Without Foundations*, Hilary Putnam proponuje alternatywne spojrzenie na twierdzenia matematyki. Twierdzi w szczególności, że mogą być one formułowane i interpretowane na wiele sposobów, tak jak to ma miejsce w mechanice kwantowej. Dualizm korpuskularno — falowy zakłada, że opis świata jako systemu cząstek i opis świata jako systemu fal są sobie równoważne i wzajemnie przekładalne. Oznacza to, iż po odpowiednim przetłumaczeniu pojęć pierwotnych, jedna teoria jest konsekwencją drugiej i na odwrót. Obydwie mają więc tę samą treść fizyczną, tzn. dany fakt można wyjaśnić poprzez odwołanie się do pojęcia elektronu bądź jako cząstki, bądź jako fali. W konsekwencji ani jedno, ani drugie ujęcie nie jest uprzywilejowane, a w praktyce naukowej są traktowane niemal synonimicznie. W matematyce sytuacja przedstawia się analogicznie, przy czym spośród wielu równoważnych opisów faktów matematycznych, dwa zasługują na miano najważniejszych. Pierwszy związany jest z możliwością redukcji matematyki do teorii mnogości, drugi natomiast powstaje na bazie logiki modalnej.

Z matematycznego punktu widzenia nie ma różnicy między stwierdzeniami:

(1) istnieje zbiór liczb naturalnych spełniających hipotezę Gold-

bacha,
(2) możliwe jest wybranie takich liczb naturalnych, aby ta hipoteza była spełniona[29].

Jednak sposób sformułowania faktu przywołuje zupełnie inny obraz w naszym umyśle: podczas gdy (1) zakładając istnienie liczb, wszelkie związki, o jakich mówi, ogranicza wyłącznie do nich, (2) stwierdza wyłącznie sam związek, bez przyjmowania jakichkolwiek zobowiązań ontologicznych. Putnam każe nam wierzyć, że tego rodzaju dualizm obiektowo — modalny można rozszerzyć na całą matematykę klasyczną. W pierwszym ujęciu jest ona całkowicie ekstensjonalna, ale dopuszcza szerokie spektrum bytów zewnętrznych; w drugim zaś — nie odnosi się do żadnych specjalnych obiektów, a pokazuje jedynie „co z czego wynika". Jeśli więc platonizm cieszy się tak olbrzymią popularnością, to tylko dlatego, że łatwiej jest myśleć o matematyce w języku obiektów niż w języku modalnym.

Tymczasem zdecydowanie korzystniej byłoby obydwa spojrzenia traktować nie jako rywalizujące ze sobą, ale raczej jako równorzędne — jedno może bowiem posłużyć dla lepszego wyjaśnienia i ugruntowania drugiego. I tak teoriomnogościowe pojęcie modelu uzasadnia logikę modalną (możliwość to prawdziwość w pewnym modelu, konieczność — prawdziwość we wszystkich modelach), ale z drugiej strony zbiór jest w pewnym sensie możliwością selekcji obiektów. Oznacza to, że postulowanie istnienia liczb jest dopuszczalne, choć nie jest niezbędne. Stwierdzenia o nich sprowadzają się bowiem do dwóch tez: (i) ω-ciągi są możliwe, (ii) pewne stwierdzenia postaci „jeżeli α jest ω-ciągiem, to..." są prawdami koniecznymi.

[29]Putnam rozważa tak naprawdę kontrprzykład dla hipotezy Fermata, dziś już pozytywnie rozstrzygniętej. Związki, o jakich mowa niżej, ujmuje w postaci implikacji $AX \to \neg Fermat$, gdzie AX jest koniunkcją aksjomatów pewnej skończenie aksjomatyzowalnej podteorii arytmetyki I rzędu, natomiast *Fermat* oznacza standardową formułę wyrażającą hipotezę Fermata w arytmetyce I rzędu.

Według Putnama, modalna interpretacja matematyki ma jedną bardzo istotną zaletę. Przyjmując możliwość i konieczność jako pojęcia pierwotne, możemy nadać jasny sens twierdzeniom mówiącym o „wszystkich zbiorach”, bez zakładania modelu maksymalnego. Nie musimy przy tym możliwych modeli i możliwych światów traktować jako nowych obiektów. Wprowadzenie spójników modalnych nie oznacza bowiem zastąpienia jednych bytów innymi, a raczej stanowi rozszerzenie tego, co możemy powiedzieć o zwykłych przedmiotach i ich rodzajach.

Artykuł *Mathematics Without Foundations* nie podejmuje problemu istnienia w matematyce. Autor pisze o różnych, choć równoważnych opisach faktów matematycznych, jednak zręcznie pomija pytanie o to, jaka autentyczna rzeczywistość kryje się za tymi obrazami. Jego celem nie jest bowiem włączenie się do sporu między realizmem i nominalizmem, a raczej wykazanie, że matematyka nie przeżywa kryzysu w swoich podstawach, a nawet więcej — nie ma i nie potrzebuje mieć podstaw. Propozycja modalnej interpretacji matematyki jest więc niczym innym, jak tylko wyrazem „antyfundamentalistycznej” postawy Putnama[30]. Niemniej jednak nie można zignorować jej wkładu w rozwój współczesnych kierunków nominalistycznych. Wykorzystanie aparatury modalnej jest dziś wśród nominalistów nie tylko powszechne, ale wręcz nieodzowne.

4. KONKLUZJE

Prekursorzy współczesnego nominalizmu znaleźli wielu wybitnych naśladowców, do których należą obecnie przede wszystkim Field, Balaguer, Chihara i Hellman. Dwaj pierwsi twierdzą, że matematyka jest pozbawiona przedmiotowego odniesienia, a jej twierdzenia nie wyrażają prawd na temat rzeczywistości. Bez nich

[30]Putnam twierdził, że modalność jest dla nominalisty w równym stopniu nie do przyjęcia, co byty abstrakcyjne. Jeśli więc dostarczył nowego oręża swoim adwersarzom, to stało się to niejako wbrew jego intencjom.

interpretacja świata byłaby być może utrudniona, ale jednak możliwa. Dowodem na poparcie tej tezy jest bezpośrednia translacja na język nominalistyczny, konkretnych teorii fizycznych. Kontynuując tę ideę Quine'a, Field przeprowadza jakościową rekonstrukcję teorii grawitacji, natomiast Balaguer — mechaniki kwantowej[31]. W obydwu przypadkach niezbędne jest przyjęcie założenia o fizycznym charakterze pewnych obiektów lub własności, a także zastąpienie standardowej teorii mnogości, mereologią. Z kolei Chihara i Hellman wierzą w wartość logiczną twierdzeń matematycznych i dlatego nie starają się ich wyeliminować z nauki. Ich celem jest raczej rekonstrukcja matematyki stosowanej w nauce, przy wykorzystaniu aparatury modalnej[32]. Chihara kontynuuje ideę jej lingwistycznej interpretacji, tak aby uzasadnić tezę, że dotyczy ona możliwych wypowiedzi a nie obiektów abstrakcyjnych. Hellman natomiast podejmuje wyzwanie nominalistycznej interpretacji strukturalizmu matematycznego. Twierdzi, że ontologię obiektów abstrakcyjnych można zredukować do postulatów wyrażających możliwość istnienia pewnych struktur.

Strategie współczesnych nominalistów są niewątpliwie bardziej złożone w porównaniu z tym, co proponowali prekursorzy. Dotyczy to zarówno skomplikowania aparatury technicznej, jak i bogactwa interpretacji filozoficznych. Niemniej jednak rdzeń wykorzystywanych narzędzi logicznych i postulatów o charakterze metodologicznym, pozostaje ciągle taki sam. Również zarzuty stawiane poszczególnym koncepcjom mają podobny lub wręcz identyczny charakter. Obejmują przede wszystkim kwestie związane z niedostatecznym wyjaśnieniem fenomenu użyteczności matema-

---

[31] Powołujemy się tutaj tylko na te prace obu autorów, które wywołały w literaturze największy oddźwięk (Field [1980] oraz Balaguer [1996]). Poglądy zarówno Fielda, jak i Balaguera ewoluowały dalej, w pierwszym przypadku w kierunku podania modalnej wersji zasady zachowawczości, w drugim — w kierunku próby sformułowania ogólnego argumentu na rzecz nominalizmu.

[32] Najważniejsze idee tej rekonstrukcji zawierają prace Chihara [1990] oraz Hellman [1989].

tyki w interpretacji rzeczywistości, naukową i dydaktyczną atrakcyjność otrzymywanych rekonstrukcji oraz ich siłę wyrażeniową.

Dodajmy na koniec, że Quine wymieniony tutaj jako jeden ze współtwórców współczesnego nominalizmu, po niepowodzeniu zainicjowanego wspólnie z Goodmanem projektu rekonstrukcji matematyki i nauki, przeszedł na stronę swoich dotychczasowych oponentów. Sformułowany przez niego argument z niezbędności, stał się podstawowym orężem obronnym realisty, rzadko podważanym nawet przez nominalistów.

LITERATURA CYTOWANA

Balaguer M., 1996, *Towards a Nominalization of Quantum Mechanics*, Mind 105 [418], 209–226.

Burdman Feferman A. and Feferman S., 2004, *Alfred Tarski: Life and Logic*, Cambridge University Press.

Burgess J.P. and Rosen G., 1997, *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford.

Chihara C., 1990, *Constructibility and Mathematical Existence*, New York: Oxford University Press.

Davis Ch., 1975, *An Investigation Concerning of Hilbert–Sierpiński Logical Form of the Axiom of Choice*, Notre Dame Journal of Formal Logic XVI/2, 145–184.

Dąmbska, I., 1948, *Czterdzieści lat filozofii we Lwowie*, w: *Pięćdziesiąt lat filozofii w Polsce*, Przegląd Filozoficzny XLIV, 14–25.

Field H., 1980, *Science without Numbers: A Defence of Nominalism*, Basil Blackwell, Oxford.

Goodman N. and Quine W.V., 1947, *Steps Toward a Constructive Nominalism*, The Journal of Symbolic Logic 12, 105–122.

Hellman G., 1989, *Mathematics Without Numbers*, Oxford: Clarendon Press.

Kotarbiński T., 1929, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Ossolineum, Lwów (wydanie II, Warszawa 1961).

Kotarbiński T., 1958, *Wybór pism*, t. II, PWN, Warszawa.

Küng G., 1967, *Ontology and the Logistic Analysis of Language*, Reidel, Dordrecht.

Lejewski Cz., 1958, *On Implicational Definitions*, Studia Logica VIII, 189–205.

Leśniewski S., 1927, *O podstawach matematyki*, Przegląd Filozoficzny XXX, 164–206.

Leśniewski S., 1930, *O podstawach matematyki* (c.d.), Przegląd Filozoficzny XXXIII, 77–105.

Leśniewski S., 1931, *O podstawach matematyki* (c.d.), Przegląd Filozoficzny XXXIV, 142–170.

Luschei E.C., 1962, *The Logical Systems of Leśniewski*, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North — Holland Publishing Company, Amsterdam.

Mancosu P., 2005, *Harvard 1940–1941: Tarski, Carnap and Quine on a Finitistic Language of Mathematics for Science*, w: History and Philosophy of Logic 26, 327–357.

Mostowski A., 1967, *Tarski Alfred*, w: The Encyclopedia of Philosophy VIII, ed. P. Edwards, New York, 77–81.

Murawski R., 2001, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Murawski R. and Woleński J., 200?, *Tarski and His Polish Predecessors* (*on Truth*).

Putnam H., 1967, *Mathematics Without Foundations*, The Journal of Philosophy 64, 5–22.

Simons P., 1982, *On Understanding Leśniewski*, History and Philosophy of Logic 3, 165–191.

Simons P., 1993, *Nominalism in Poland*, w: Polish Scientific Philosophy: The Lvov–Warsow School, Poznań Studies in the Sciences and the Humanities, vol. 28, Rodopi, Amsterdam, 207–231.

Słupecki J., 1955, *S. Leśniewski's Calculus of Names*, Studia Logica III, 7–71.

Suppes P., 1988, *Philosophical Implications of Tarski's Work*, Journal of Symbolic Logic 53, 80–91.

Woleński J., 1984, *Reizm a ontologia Leśniewskiego*, Studia Filozoficzne 5, 37–41.

Woleński J., 1986, *Reism and Leśniewski's Ontology*, w: History and Philosophy of Logic 7, 167–176.

Woleński J., 1985, *Filozoficzna Szkoła Lwowsko–Warszawska*, PWN, Warszawa.

Woleński J., 1989, *Logic and Philosophy in Lvov–Warsaw School*, Kluwer Academic Publishers.

Woleński J., 2000, *Czy Leśniewski był filozofem?*, Filozofia Nauki 3–4, 57–68.