Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLIX (2011), 81–97

Krzysztof WÓJTOWICZ
Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii

DOWÓD MATEMATYCZNY — ARGUMENTACJA CZY DERYWACJA? — CZĘŚĆ II

Niniejszy artykuł[1] stanowi drugą część pracy dotyczącej dyskusji natury dowodu matematycznego. W pierwszej zaprezentowana została koncepcja *derivation–indicator view* Azzouniego, która ma wyjaśniać relację między standardowym, znanym nam z praktyki matematycznej sposobem prowadzenia dowodów matematycznych (kiedy to odwołujemy się do semantyki pojęć matematycznych) a traktowaniem dowodu jako konstruktu czysto formalnego.

Zdaniem Azzouniego, w tle każdego standardowego dowodu tkwi pewna derywacja w systemie formalnym. Koncepcja Azzouniego nie stanowi — moim zdaniem — dobrego wyjaśnienia natury matematycznej argumentacji, i tezę tę staram się tu uzasadnić. Stanowi jednak dobry punkt wyjścia do dyskusji dotyczącej różnych aspektów dowodu matematycznego — i taką dyskusję tu podejmuję.

1. CZYM JEST SYSTEM ALGORYTMICZNY W TLE?

Azzouni nie wyjaśnia, jak zidentyfikować system algorytmiczny leżący u podłoża interesującego nas dowodu, ograniczając się do stwierdzenia, że systemy algorytmiczne nie ograniczają się do żadnej konkretnej logiki ani języka, zaś jedyny istotny warunek to warunek (po-

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu N N101 094136.

tencjalnej) mechanicznej rozpoznawalności dowodów (czymkolwiek by one nie były) [Azzouni 2004, 86]. Pojęcie algorytmu występuje — w luźnym sensie — w mowie potocznej (mówimy o algorytmie robienia ciasta albo strojenia gitary), wymaga jednak uściślenia. Jego matematyczny odpowiednik ma precyzyjny sens formalny: zgodnie z tezą Churcha, adekwatnym ujęciem naszego intuicyjnego pojęcia obliczalności stanowi pojęcie obliczalności w sensie Turinga. Tak — jak sądzę — należy też rozumieć stanowisko Azzouniego. W przeciwnym wypadku trudno byłoby tutaj mówić o mechanicznej rozpoznawalności (lub przyjąć niestandardowe rozumienie pojęcia algorytmu)[2].

Pojawia się problem, na podstawie jakich kryteriów jest wybierany ów algorytmiczny system formalizujący nasze nieformalne (realne) dowody? Azzouni twierdzi, że tutaj panuje pełna dowolność: żądamy jedynie, aby istniał jakiś system algorytmiczny. Na jakiej jednak podstawie nasza „podświadomość matematyczna" rozpoznaje i wybiera odpowiedni system algorytmiczny, gwarantujący poprawność danego realnego dowodu? Problem rozpoczyna się już przy wyborze formalizacji — nie jest przecież prawdą, że uprawiana nieformalnie dziedzina matematyki w jednoznaczny sposób taką formalizację wyznacza. Można podać liczne przykłady historyczne — np. definicja ciągłości funkcji może być sformułowana bądź w ciągowej wersji Heinego, bądź epsilonowi-deltowej definicji Cauchy'ego. Te definicje są wprawdzie (przy pewnych dodatkowych założeniach) równoważne, ale przecież są to jednak różne ujęcia pojęcia ciągłości. Liczba rzeczywista może być formalnie zrekonstruowana jako ciąg Cauchy'ego liczb wymiernych, bądź jako przekrój Dedekinda. Za podstawę teorii funkcji analitycznych można przyjąć bądź definicję w terminach równań Cauchy'ego-Riemanna, bądź różniczkowalności w sensie zespolonym, bądź w terminach rozwijalności funkcji w szereg potęgowy[3]. Wybór języka i po-

[2]W ostatnich latach toczy się ożywiona dyskusja na temat niestandardowego rozumienia pojęcia obliczenia, mówi się o obliczeniach analogowych, o hiperobliczeniach etc. (por. np. [Copeland 2002], [Stannett 2006]). Jednak w dyskusji dotyczącej koncepcji Azzouniego przyjmuję standardowe (turingowskie) rozumienie pojęcia algorytmu.

[3]Ten przykład jest przedmiotem badań w pracy [Mancosu 2001]. Autor analizuje tam jeszcze inne ujęcie teorii funkcji analitycznych, które zdaniem jego twórcy (Pring-

jęć pierwotnych jest więc kwestią pewnej decyzji. Zaś po ustaleniu języka i pojęć pierwotnych możemy różnicować siłę aksjomatów przyjmowanych w danym formalnym systemie[4]. Droga do formalizacji nie jest więc bynajmniej wyznaczona jednoznacznie. Czy znaczy to, że gwarantem prawomocności dowodu jest istnienie jakiegokolwiek dowodu formalnego w tle, w ramach jakiejkolwiek formalizacji?[5].

Z faktem mnogości możliwych ujęć formalnych wiąże się kolejny problem. Musimy przecież uznać, że dany system formalny S jest adekwatnym odpowiednikiem danego sytemu nieformalnego T[6]. Akceptacja danego systemu formalnego S, jako adekwatnie ujmującego nasze preformalne intuicje wymaga odwołania się (na metapoziomie) do oceny relacji między naszą nieformalnie uprawianą matematyką a systemem sformalizowanym. Tutaj musimy odwołać się do jakiegoś kryterium, które już nie może mieć już charakteru formalnego. Problem odwołania do intuicji zostaje tutaj przeniesiony na wyższy poziom — ale jest nadal obecny[7]. Azzouni jest tego świadom: pisze wyraźnie o tym, że ów system algorytmiczny jest wyspecyfikowany w sposób nieformalny. Przy formalizowaniu w nieuchronny sposób pojawia się więc

sheima) pozwala na lepsze i bardziej jednolite wyjaśnienie szeregu faktów matematycznych.

[4]W zależności od tego, jak silne założenia przyjmiemy, dowód danego twierdzenia może okazać się prosty lub niezwykle trudny (w skrajnym przypadku, jeśli za aksjomat przyjmiemy dowodzone zdanie, to dowód jest po prostu jednolinijkowy).

[5]Przy bardzo liberalnym ujęciu moglibyśmy dokonywać też bardzo sztucznych formalizacji: np. każda linijka standardowego dowodu byłaby nowym symbolem, zaś w tabeli instrukcji znaleźlibyśmy warunek mówiący, że w danym dowodzie po danym symbolu (będącym odpowiednikiem fragmentu standardowego dowodu) następuje kolejny symbol (będący odpowiednikiem innego fragmentu). Ponieważ znamy skończenie wiele dowodów, taka tabela byłaby skończona, a więc zadana w sposób efektywny. Po stworzeniu nowego dowodu tabela byłaby aktualizowana. Taka formalizacja — choć poprawna — byłaby jednak w oczywisty sposób sztuczna.

[6]Podobna sytuacja pojawia się lokalnie, gdy zastanawiamy się np., czy dana definicja formalna adekwatnie ujmuje pewne intuicyjne pojęcie (np. pojęcie ciągłości, prawdopodobieństwa, długości krzywej, powierzchni figury etc.).

[7]Można tutaj puścić wodze fantazji, twierdząc, że nasze decyzje dotyczące adekwatności formalizacji nieformalnego systemu T poprzez system S są regulowane przez pewien algorytmiczny metasystem... i tak dalej. Takie ujęcie niewiele wnosi, bo popadamy w regres.

element semantyczny: formalizujemy w taki sposób, aby odtworzyć sieć pojęć, zależności, aby zachować udowodnione nieformalnie twierdzenia! Posługując się terminologią Lakatosa, nasze nieformalnie udowodnione twierdzenia można uznać za falsyfikatory heurystyczne dla owego systemu algorytmicznego. Owe formalne systemy nie biorą się z powietrza: wszak wymóg zachowania już istniejących wyników stanowi jedno z kryteriów uznania, że dana formalizacja jest adekwatna. Jednak w tej sytuacji powstaje błędne koło: owe systemy formalne mają niejako gwarantować prawomocność wiedzy uzyskanej nieformalnie — ale kryterium trafności formalizacji stanowi właśnie to, że jest ona takim gwarantem. Nie widać tu prostego wyjścia z tej sytuacji.

Kolejna wątpliwość dotyczy tego, czy faktycznie przyjęcie istnienia takich derywacji w tle wyjaśnia zgodność matematyków dotyczącą nieformalnych dowodów matematycznych. Mówiąc nieco żartobliwie, koncepcja Azzouniego jest czymś w rodzaju psychoanalizy matematycznej. Sam Azzouni oczywiście zdaje sobie sprawę z faktu, że matematycy nie prowadzą dowodów formalnych, i że przedmiotem analizy filozoficznej winny być realne dowody. Zarazem jednak status owych realnych dowodów jest wyjaśniany poprzez wprowadzenie hipotezy o istnieniu pewnych idealnych, algorytmicznych dowodów w tle — których istnienia matematyk nie musi sobie nawet uświadamiać. Można powiedzieć, że owe dowody idealne mają charakter obiektów teoretycznych, których istnienie Azzouni postuluje, aby wyjaśnić zgodność matematyków co do dowodów realnych. Danymi doświadczalnymi są tu więc obserwacje dotyczące zgodności matematyków, postulowane byty teoretyczne to idealne dowody, zaś prawa pomostowe dotyczą powiązań między owymi idealnymi dowodami a dowodami realnymi. I tu pojawia się trudność, bowiem Azzouni nie wyjaśnia, jakiego typu relacja miałaby tutaj zachodzić. Czy chodzi o jakąś wyidealizowaną, niejako czysto ontologiczną zależność, czy też o zależność istotną kognitywnie? Czy derywacja ma pełnić jedynie funkcję swoistego uprawdziwiacza (*truth-makera*) twierdzenia, czy też ma pełnić jakieś funkcje poznawcze?

Jeśli uznamy, że istnienie takiej derywacji stanowi jedynie warunek prawdziwości dla twierdzenia matematycznego, to znajdziemy się w sytuacji podobnej do sytuacji platonika. Platonik twierdzi (zgodnie z klasycznym rozumieniem prawdy), że warunki prawdziwości zdań matematycznych zadane są poprzez konfiguracje abstrakcyjnych bytów. Stanowisko takie jest oczywiście nie do zaakceptowania dla antyrealisty (a Azzouni deklaruje stanowisko antyrealistyczne). Jednak uznanie, że owymi *truth-makerami* dla twierdzeń matematycznych są jakieś hipotetyczne, niedostępne poznawczo derywacje w formalnych systemach, różni się od stanowiska platonizmu jedynie werbalnie. Można byłoby próbować uchylić ten zarzut twierdząc, że nie myślimy o aktualnym, a jedynie o potencjalnym istnieniu takich derywacji. Jednak eliminacja założeń platonistycznych poprzez wprowadzenie kategorii owych potencjalnych derywacji formalnych jedynie przerzucałaby „koszty ontologiczne" w inne miejsce[8].

Dochodzimy zatem do problemu poznawczej roli dowodów matematycznych, w szczególności owych derywacji formalnych. Uznanie, że owe derywacje nie pełnią żadnej funkcji poznawczej byłoby bardzo nienaturalne. Nie jest jednak jasne, jaka to ma być rola, skoro matematycy często w ogóle nie wiedzą, że taka formalizacja jest możliwa (co nie przeszkadza im tworzyć, rozumieć i oceniać dowodów). Problem ten jest przedmiotem dyskusji w następnym paragrafie.

2. POZNAWCZA DOSTĘPNOŚĆ DOWODÓW

Choć dowody matematyczne są (jak sądzimy) potencjalnie formalizowalne, na ogół dokonanie takiej formalizacji nie stanowi poznawczego zysku z punktu widzenia specjalisty w danej dziedzinie. Jest wręcz na odwrót: w wersji sformalizowanej nie widać idei dowodu, kluczowych technik i pojęć, zasadniczych pomysłów etc. Można nawet powiedzieć (z niewielką chyba przesadą), że matematyk zapytany

[8]Zauważmy na marginesie, że taki problem dotyczy wielu koncepcji antyrealistycznych. Eliminacja platonistycznej ontologii dokonywana jest np. poprzez wprowadzenie kategorii modalnych i przyjęcie pewnych założeń dotyczących możliwości (tak czynią np. Chihara i Hellman) poprzez wprowadzenia kategorii Iedalnego Podmiotu (Kitcher), poprzez uznanie pewnych pojęć semantycznych za pierwotne etc. Mówiąc swobodnie, zawsze mamy tutaj do czynienie z podobną sytuacją: nieuniknione koszty są „przerzucane" w inne miejsce.

o poprawną w sensie logicznym — czyli sformalizowaną — wersję prezentowanego przez niego dowodu nowego wyniku matematycznego odpowie, że to nie ma żadnego znaczenia z punktu widzenia jego badań. To, jak wygląda formalna rekonstrukcja dowodu dotyczącego np. topologii czy geometrii różniczkowej nie ma bowiem znaczenia z punktu widzenia lepszego zrozumienia danego zagadnienia topologicznego czy geometrycznego. Źródłem tego rozumienia są bowiem pewne treści matematyczne, relacje między pewnymi pojęciami, ideami — a nie formalna reprezentacja. Nagabywany o sformalizowaną wersję dowodu specjalista powie zapewne, że jego zadaniem jest uzyskanie nowego wyniku, rozwiązanie konkretnego problemu matematycznego (udowodnienie twierdzenia), swoiste „wniknięcie" w istotę problemu, a nie przepisywanie twierdzeń i dowodów w jakiejś wymyślonej przez logików notacji. Nasz matematyk doda zapewne, że żaden specjalista z jego dziedziny nie ma wątpliwości co do poprawności dowodu — a zapisywanie go w jakiejś „kanonicznej notacji logicznej" może jedynie zaciemnić obraz. Realne dowody zawierają skróty, wykorzystywane są w nich diagramy[9], pojawiają się zwroty typu „jak łatwo zobaczyć", albo „w oczywisty sposób teza wynika z twierdzenia α" etc. — co bynajmniej nie zmniejsza ich komunikatywności, wprost przeciwnie.

Sytuacja ta jest nieco dziwna: oto okazuje się że to, co ponoć czyni dowód nieformalny prawomocnym sposobem argumentacji (czyli owa algorytmiczna derywacja w tle) nie ma żadnego znaczenia poznawczego — przynajmniej na poziomie świadomych aktów matematyka. Jaką więc rolę może ogrywać owa derywacja? Jak się wydaje, jedynym wytłumaczeniem tej sytuacji byłoby uznanie, że nasze świadome akty intelektualne są (w wypadku matematyki) emergentne w stosunku do pewnych formalnych przebiegów obliczeniowych w tle. My wprawdzie możemy sobie nie zdawać z tego sprawy, ale jednak źródłem na-

[9] W pracy [Brown 1999] autor analizuje rolę rysunków w dowodach matematycznych, stawiając wręcz tezę, iż (niektóre) dowody czysto rysunkowe można uznać za pełnoprawne dowody matematyczne. Tezę Browna uważam za przesadną, trudno jednak zanegować fakt, że często odpowiedni szkic może (z poznawczego punktu widzenia) zastąpić formalny dowód — przekazuje idee w sposób dostatecznie jasny, aby dalsza argumentacja stała się zbędna.

szego przekonania dotyczącego poprawności danego dowodu semantycznego jest właśnie istnienie odpowiedniej derywacji formalnej. Byłaby to więc swoista teza komputacjonizmu w filozofii umysłu (czy mówiąc słabiej: teza komputacjonizmu odniesiona do matematyzującego umysłu — aby przyjąć koncepcję Azzuniego nie musimy być komputacjonistami *en bloc*). Azzouni twierdzi, że sytuacja przypomina sytuację użytkownika języka naturalnego, który również nie ma uświadomionych owych reguł, a jednak sprawnie posługuje się językiem. Znajomość reguł algorytmicznych w tle nie jest więc konieczna do tego, aby na powierzchni tworzyć dowody. Owo odwołanie do systemu algorytmicznego w tle nie ma przy tym sztywnego charakteru — matematycy mogą bowiem odwoływać się do coraz to bogatszych systemów. Azzouni postuluje istnienie czegoś w rodzaju uniwersalnej „gramatyki rozumowań", z której (być może) nie zdają sobie sprawy matematycy. Owa „gramatyka rozumowań" wyjaśnia, iż u podłoża akceptacji argumentów matematycznych leżą pewne procesy algorytmiczne w tle.

W takiej sytuacji należałoby więc uznać, że owe formalne derywacje mogą wyjaśniać mechanizmy poznania matematycznego w podobny sposób, w jaki znajomość neurofizjologii może wyjaśniać mechanizmy poznawcze. Nie mamy świadomego dostępu do naszych przebiegów neurofizjologicznych, ale to one leżą u podłoża naszej świadomości (choć nie znamy natury zależności między treściami świadomości a procesami neurofizjologicznymi)[10]. Podobnie musiałoby być w przypadku owych formalnych derywacji — one miałyby wyjaśniać zjawiska związane z dowodzeniem. Należałoby więc uznać, że np. matematycy XIX-wieczni akceptowali pewne dowody, gdyż zupełnie nieświadomie odwoływali się do pewnych (bliżej niesprecyzowanych) systemów algorytmicznych, tkwiących — mówiąc metaforycznie — w ich matematycznej podświadomości[11]. Innymi słowy, hi-

[10]Taka jest w każdym razie teza naturalisty — jednak jej przyjęcie jest naturalne z punktu widzenia analizy koncepcji Azzouniego.

[11]Rav w pracy [Rav 2007] podaje przykłady matematyków babilońskich, greckich czy indyjskich. W ich przypadku procedury dowodowe mogły mieć (na ogół tego nie wiemy) zupełnie inny charakter, niż nasze: mogli na przykład opierać się na pewnych empirycznie przetestowanych regułach. Czy tu również mamy do czynienia z dowodami, u podłoża których leżą systemy algorytmiczne?

storia matematyki to w szczególności historia odkrywania przez matematyków prawdziwych motywów ich działań: działali bowiem (nieświadomie) w granicach pewnej tkwiącej w tle rodziny systemów algorytmicznych. Tak jest również teraz — przy czym nam owa kategoria jest już znana (podobnie jak naturalistycznie nastawionemu psychologowi znane jest już pojęcie neuronu).

Jeśli przyjmiemy taką perspektywę, to znaczy to, że owe przebiegi formalne w tle muszą mieć charakter przebiegów neurofizjologicznych. W przeciwnym razie musielibyśmy uznać, że gwarantem prawomocności dowodów semantycznych byłyby bytujące w „przestrzeni metafizycznej" derywacje formalne, z którymi nie musimy mieć poznawczego kontaktu. Pojawia się jednak problem dotyczący implementacji owych przebiegów obliczeniowych na naszej — mówiąc kolokwialnie — „biologicznej maszynie". Niektóre dowody w wersji sformalizowanej mogą bowiem mieć bardzo dużą długość. Co wtedy?

Pouczający jest przykład podany przez Boolosa w artykule [Boolos 1987]. Autor poddaje tam analizie pewne wnioskowanie, sformułowane w języku pierwszego rzędu. Mamy tam stałą: 1; jednoargumentowy symbol funkcyjny „*s*"; dwuargumentowy symbol funkcyjny „*f*", jednoargumentowy predykat: „*D*". Założenia to:

1. $\forall n f(n, 1) = s1$
2. $\forall x f(1, sx) = ssf(1, x)$
3. $\forall n \forall x f(sn, sx) = f(n, f(sn, x))$
4. $D(1)$
5. $\forall x(D(x) \to D(sx))$

WNIOSEK: $D(f(ssss1, ssss1))$.

Intuicyjnie, wnioskowanie dotyczy liczb naturalnych. S to następnik, f to funkcja określona na parach liczb naturalnych, D jest własnością (która może przysługiwać liczbom naturalnym). Wniosek głosi, że liczba będąca wartością funkcji f dla argumentów $(5, 5)$ ma własność D.

Jednak dowód tego faktu w formalizmie pierwszego rzędu jest bardzo długi. Funkcja $f(x, y)$ rośnie bardzo szybko, w stylu funkcji Ackermanna. Wartość $f(4, 4)$ stanowi „wieżę" potęg dwójki. Dowód tożsamości $D(f(5, 5))$ jest astronomicznej długości. Zarazem jednak dowód w logice drugiego rzędu jest elementarny. Mamy tu do czynienia z ciekawą sytuacją: formalny dowód jest absolutnie poza naszym zasięgiem (i również poza zasięgiem nawet najszybszego komputera), natomiast z naszego punktu widzenia dowód w logice drugiego rzędu jest absolutnie przekonujący i wystarczający. A zatem sam dowód — co do zasady — jest algorytmizowalny, ale dla nas owa algorytmiczna wersja jest całkowicie niedostępna. Boolos twierdzi, że z faktu, iż z taką łatwością umiemy faktycznie udowodnić to twierdzenie świadczy o tym, że żaden system logiczny pierwszego rzędu nie stanowi dobrej idealizacji naszych faktycznych (psychologicznych) procesów wnioskowań [Boolos 1987]. Wydaje się bowiem, że nawet nasza zdolność do rozpoznawania pewnych zdań pierwszego rzędu jako prawdziwych wniosków odwołuje się do czegoś więcej, niż tylko formalizacja w języku pierwszego rzędu, że *de facto* sięgamy do zasobów poznawczych wykraczających poza logikę pierwszego rzędu — i do przekonań o charakterze *par excellence* semantycznym[12].

Nie jest jasne, jak wyjaśnić przykład Boolosa z punktu widzenia koncepcji Azzouniego. Wszak ów algorytmiczny, formalny dowód w logice pierwszego rzędu jest całkowicie poza naszym zasięgiem. Tym samym twierdzenie, że u podłoża naszej akceptacji zwykłego dowodu leży taka derywacja jest gołosłowne. Wyjaśnienie, że w tle naszej zdolności do rozpoznawania inferencji drugiego rzędu tkwi system algorytmiczny (w którym dowód jest zbyt długi z punktu widzenia czasu

[12]Zjawisko, iż dowód w jednym systemie może być takiej astronomicznej długości, zaś w innym — normalny, jest znane od dawna. Często twierdzenia o takiej własności są sztuczne, jednak niekiedy są to zwykłe, standardowe twierdzenia matematyczne. Dowody poznawczo niedostępne stają się proste — ale za cenę przyjęcia pewnych silniejszych założeń (np. ZFC zamiast PA). W przypadku wnioskowania podanego przez Boolosa, ową ceną za zdobycie wiedzy iż zachodzi $D(f(5, 5))$ jest przyjęcie pewnych założeń na temat logiki drugiego rzędu.

naszego życia — a może i nawet wieku Wszechświata) jest absolutnie niewiarygodne poznawczo[13].

3. PROBLEM WYJAŚNIANIA

Ujęcie Azzouniego zachęca do dyskusji problemu wyjaśniania w matematyce. Problem ten jest szeroko dyskutowanym w odniesieniu do nauk empirycznych, natomiast w przypadku matematyki literatura jest bez porównania uboższa. Już samo sformułowanie problemu może na pierwszy rzut oka budzić pewien opór: pytanie o to, dlaczego kamień leci po takiej a nie innej krzywej brzmi rozsądnie (wyjaśniamy w oparciu np. o prawa ruchu), natomiast pytanie o to, dlaczego prawdziwe jest np. twierdzenie Stokesa może się wydawać źle postawione (lub trywialne). Jednak matematyk w swojej praktyce zadaje sobie przecież pytania takie, jak: dlaczego tak naprawdę to twierdzenie da się tak udowodnić? Jaki tak naprawdę fakt wyraża to twierdzenie? etc. Matematycy posługują się w analizach „okołodowodowych" sformułowaniami typu „tak naprawdę, to badane równanie nie ma rozwiązania dlatego, że jakaś przestrzeń funkcyjna ma taką a nie inną własność", albo „tak naprawdę, to ten dowód wyraża pewien głębszy fakt" etc. Nie mają przy tym na myśli samego istnienia dowodu, ale coś więcej. Trudno przecież zanegować fakt, iż zdaniem matematyków teoria Galois wyjaśniła szereg wyników związanych z rozwiązywaniem równań. Jest to zjawisko o charakterze ogólnym: często twierdzenia wyjaśniają, dlaczego pewne pojęcia są ważne.

Takiemu postawieniu sprawy można zarzucać tworzenie hipostaz: czyż zadaniem matematyka nie jest dowodzenie twierdzeń, a nie wzbu-

[13]Ciekawe przykłady wnioskowań podobnych do wnioskowania Boolosa podaje też Ketland w artykule [Ketland 2005]. Rozważa tam wnioskowania, które są oczywiste z punktu widzenia standardów matematycznej argumentacji, natomiast dowody formalne w logice pierwszego rzędu byłyby zbyt długie, aby mogły być zastosowane jako środek inferencyjny. (Ketland formułuje swoje argumenty w kontekście dyskusji na temat nominalistycznej rekonstrukcji matematyki, twierdząc, że istnienie tego typu wnioskowań stanowi problem dla nominalisty: nie jest on bowiem w stanie wyjaśnić w ramach czysto nominalistycznej „maszynerii", że pewne skądinąd oczywiste wnioskowania są faktycznie poprawne).

dzanie w innych matematykach poczucia głębi czy doniosłości wyników — nie mówiąc już o postulacie poszukiwania jakichś tajemniczych przyczyn (które to poszukiwania mają być czymś więcej niż tylko ustalaniem zależności logicznych między zdaniami)? Pytaniom o przyczynę można udzielić odpowiedzi w duchu formalizmu (czy szerzej: weryfikacjonizmu): przyczyną prawdziwości twierdzenia jest to, że podano jego dowód. W tym duchu, stwierdzilibyśmy, że to, jaki jest dowód (długi czy krótki, obliczeniowy, trickowy, siłowy, głęboki, ładny, inspirujący, zaskakujący etc.) nie ma znaczenia z punktu widzenia procesu wzbogacania wiedzy (podobnie jak nie ma znaczenia, czy dowód został napisany ołówkiem czy długopisem, ładnym czy brzydkim charakterem pisma, czy referent mówił dźwięcznym głosem czy nie etc.). Liczy się jedynie fakt istnienia owego dowodu. Jednak taki zarzut nie bierze pod uwagę praktyki matematycznej: rola dowodu w praktyce matematycznej jest z pewnością większa, niż tylko jako środka do dowodzenia kolejnych zdań[14]. Pojęcie wyjaśniania w matematyce jest niewątpliwie trudno uchwytne, podobnie jak np. pojęcie doniosłości czy głębi twierdzenia: matematycy się nimi posługują, ale trudno byłoby podać ich precyzyjne charakteryzacje. Jednak trudno odmówić mu sensowności i znaczenia dla analiz filozoficznych.

Ważną inspiracją dla dyskusji problemu wyjaśniania jest fakt istnienia dowodów komputerowych (które z całą pewnością mają charakter formalny) i pytanie o ich poznawczy status. Nie ma tu miejsca na szczegółową analizę, warto jednak odnotować, że w opinii wielu matematyków takie dowody (w szczególności najbardziej znany i najszerzej dyskutowany dowód twierdzenia o czterech barwach) pozostawiają poczucie niedosytu[15]. Aby wyraźniej postawić problem rozważmy eksperyment myślowy w którym komputery działają np. 2^{1000} razy szybciej niż obecnie. Jeśli zlecimy takiemu komputerowi dowodzenie kolejnych

[14]Np. Rav w pracy [Rav 1999] twierdzi, że to dowody stanowią właściwy przedmiot badań matematyki, zaś twierdzenia należy traktować w pewnym sensie jedynie jako swoiste etykiety. Nawet jeśli ten punkt widzenia jest nieco przesadny, to nie ulega wątpliwości, że poznawcza rola dowodu matematycznego jest fundamentalna.

[15]Niektórzy twierdzą wręcz, że taki dowód w ogóle nie wyjaśnia przyczyn prawdziwości twierdzenia o czterech barwach, i nie zasługuje na miano pełnoprawnego dowodu matematycznego (takie krytyczne uwagi przytacza np. [Rota 1997]).

twierdzeń ZFC, będzie je generował z ogromną prędkością. Czy przyrost naszej wiedzy jest proporcjonalny do wysokości stosu zadrukowywanych owymi twierdzeniami kartek? Z pewnością nie. Pierwsza trudność, jaka tutaj się pojawi, to odróżnienie wyników istotnych od nieistotnych[16]. W czasie tej procedury selekcyjnej musielibyśmy odwołać się do kryteriów pozaformalnych, do naszych przekonań dotyczących tego, że dane twierdzenie jest ciekawe, głębokie, doniosłe, zaskakujące etc. Gdybyśmy zaś faktycznie zidentyfikowali ważne twierdzenie udowodnione przez komputer, to natychmiast podjęlibyśmy próbę zrozumienia tego, jakie idee tkwią u podłoża danego dowodu. Trudno sobie wyobrazić, aby matematycy stwierdziwszy, że komputer informuje nas o tym, iż właśnie udowodnił twierdzenie Riemanna (oczywiście sformułowane w języku ZFC), ograniczyliby się do pokiwania głowami w zadowoleniu, że wreszcie ów problem został rozwiązany. Nie zadowoliliby się konstatacją, że prawdziwą przyczyną, dla którego hipoteza Riemanna jest prawdziwa jest to, że istnieje ciąg formuł ZFC długości np. $2^{124} + 32443$, będący jej formalnym dowodem. Powiedzieliby raczej, że sam fakt istnienia takiego ciągu formuł nie wyjaśnia, dlaczego to jest prawda — i nadal zadawaliby pytania np. o to, jakie idee (topologiczne? geometryczne? algebraiczne?) leżą u podłoża owego faktu, dlaczego to twierdzenie jest prawdziwe, czy jest wyrazem jakichś głębszych zależności etc. Ten eksperyment myślowy można odnieść do koncepcji Azzouniego: istnienie formalnej derywacji w tle nie wyjaśniałoby bowiem bynajmniej, dlaczego dane twierdzenie (np. hipoteza Riemanna — gdyby została udowodniona) jest prawdziwe.

[16]Należy pamiętać, że ogromna większość tak wygenerowanych twierdzeń to byłyby twierdzenia mało ciekawe, na przykład takie jak: „Jeśli zbiór A ma 5 elementów, zaś zbiór B ma 2 elementy, to istnieje dokładnie tyle funkcji charakterystycznych określonych na iloczynie kartezjańskim $A \times B$ ile jest podzbiorów zbioru będącego sumą 3 rozłącznych zbiorów C, D, E takich, że C ma 2 elementy, D ma 3 elementy, zaś E ma 5 elementów". Jeśli będziemy mieli pecha, to nasz komputer zacznie zadrukowywanie owych kartek od niezliczonych wariantów tego właśnie twierdzenia dla różnych możliwych mocy zbiorów A, B, C, D, E.

4. KONSEKWENCJA SEMANTYCZNA A SYNTAKTYCZNA

Przy dyskusji koncepcji Azzouniego, istotna staje się różnica między konsekwencją syntaktyczną i semantyczną. Przy ustalaniu, czy α jest konsekwencją syntaktyczną musimy mieć do dyspozycji pewien zdefiniowany zbiór reguł — i wskazać stosowny ciąg formuł (stosowną derywację) formuły α w ramach aparatu dedukcyjnego. Jeśli tak jest, to sformułowany przez Azzouniego warunek algorytmicznej sprawdzalności jest spełniony.

Sprawa nie jest aż tak prosta w wypadku konsekwencji semantycznej: mowa tutaj jest bowiem o klasie wszystkich modeli dla interesującej nas teorii T. Jak wiadomo, na mocy twierdzenia o pełności, w przypadku logiki pierwszego rzędu istnienie dowodu formalnego zdania α w teorii T jest równoważne faktowi, że zdanie α jest prawdziwe we wszystkich modelach dla T (mówiąc krócej: konsekwencja semantyczna i syntaktyczna są w przypadku logiki pierwszego rzędu tożsame). W przypadku teorii pierwszego rzędu możemy zatem (odwołując się do twierdzenia o pełności) przyjąć tezę, iż semantyczne argumenty (odwołujące się do naszego rozumienia tego, czym są modele dla T) mają swoje odpowiedniki w postaci formalnych derywacji. Jednak na ogół nie jest dostępna żadna efektywna procedura, która umożliwiałaby „przejrzenie" owych modeli dla T i sprawdzenie, czy faktycznie tam jest prawdziwe dowodzone przez nas zdanie α. Co więcej, sama znajomość faktu iż α jest konsekwencją semantyczną teorii T nie prowadzi nas na ogół w efektywny sposób do znalezienia owej żądanej derywacji formuły α w teorii T.

Jednak zgodnie z koncepcją Azzouniego należałoby stwierdzić, iż fakt, że uzasadniliśmy, iż α jest semantyczną konsekwencją T (a to jest typ rozumowania jaki często stosujemy) zarazem stanowi (w świetle pełności logiki pierwszego rzędu) argument na rzecz istnienia owej derywacji formalnej „gdzieś w tle" — i to właśnie owa derywacja stanowi argument na rzecz poprawności naszego rozumowania[17]. Uważam taki

[17] Oczywiście, argumenty teoriomodelowe też można sformalizować, jednak na pewnym poziomie staniemy wobec konieczności odwołania się do intuicyjnego, preteoretycznego rozumienia pewnych pojęć i akceptacji pewnych faktów jako danych.

sposób argumentacji za bardzo odległy od praktyki: dlaczego niby nasza zgoda na to, że w każdym modelu dla T prawdziwe jest zdanie α (użyte są tu sformułowania *par excellence* semantyczne) miałaby wynikać z faktu, że istnieje pewna formalna derywacja α z T? Czy faktycznie matematyk godzi się, że zdanie α jest prawdziwe w strukturach pewnego typu (modelach dla T), ponieważ gdzieś w tle majaczy formalny dowód (derywacja) α na podstawie T? Jest to teza pozbawiona podstaw — i z całą pewnością nie odpowiada praktyce matematycznej[18]. Mówiąc swobodnie, jest to teza u podłoża której leży owa „matematyczna psychoanaliza" o której wspomniałem wcześniej: matematyk wierzy w to, że we wszystkich strukturach opisanych przez T prawdziwe jest zdanie α, ponieważ w podświadomości ma formalną derywację α z aksjomatów T oraz twierdzenie o pełności. Teza taka jest karkołomna. Co więcej, nawet gdybyśmy ową (karkołomną!) tezę zaakceptowali dla teorii matematycznych sformułowanych w języku pierwszego rzędu, to na placu boju pozostaje przypadek teorii sformułowanych w językach, dla których nie zachodzi twierdzenie o pełności. Najprostszy przykład to logika drugiego rzędu; aby nie mnożyć przykładów ponad potrzebę ograniczę się do niej[19] Konsekwencja semantyczna jest w przypadku logiki drugiego rzędu pojęciem silniejszym niż konsekwencja syntaktyczna: istnieją takie semantyczne konsekwencje teorii T, dla których nie istnieje formalny dowód. Pojawia się pytanie, do którego typu konsekwencji odwołuje się w naturalny sposób mate-

A sama semantyka teoriomodelowa ma formalizować pewne intuicje semantyczne, i to one są pierwotne, a nie ich formalny odpowiednik.

[18]Rozważmy — jako *toy example* — przykład konsekwencji na poziomie rachunku zdań. Możemy za pomocą metody zerojedynkowej sprawdzić, że dana formuła KRZ jest konsekwencją danego zbioru zdań KRZ. Nie znaczy to przecież bynajmniej, że wiemy, jak wygląda formalna derywacja; co więcej, możemy nawet nie zdawać sobie sprawy z tego, że dla KRZ obowiązuje twierdzenie o pełności i że nasz argument semantyczny ma odpowiednik w postaci formalnej derywacji. Jeszcze wyraźniej widać to w przypadku logiki pierwszego rzędu: możemy sformułować czysto semantyczny argument (odwołując się do własności klas modeli dla pewnej teorii T) aby uzasadnić, że pewne zdanie α wynika z tej teorii T. Ale nie ma to nic wspólnego z istnieniem owej formalnej derywacji. Gdyby nawet dla logiki pierwszego rzędu nie obowiązywało twierdzenie o pełności, nasz argument semantyczny pozostawałby w mocy.

[19]Pamiętajmy o przykładzie Boolosa, który dotyczy właśnie logiki drugiego rzędu.

matyk w trakcie uzasadniania twierdzeń? Twierdzę, że jest to konsekwencja semantyczna — i że to ona stanowi podstawowy, pierwotny dla dowodów matematycznych typ konsekwencji. Dzieje się tak po prostu dlatego, że uprawiając matematykę myślimy o dowodzeniu tez o pewnych obiektach, a nie o przekształcaniu symbolicznych napisów w oderwaniu od ich interpretacji. Jednak w takiej sytuacji nie ma żadnego sensu powoływanie się na istnienie formalnej derywacji w tle — bo takiej derywacji po prostu być wcale nie musi. W jaki zatem sposób mielibyśmy wytłumaczyć fakt, że matematycy prowadzą rozumowania w ramach których odwołują się do faktów o czysto semantycznym charakterze? Nie jest przekonujące wyjaśnienie (które byłoby — jak sądzę — sformułowane w duchu Azzouniego) iż owe rozumowania można sformalizować w pewnej metateorii, w tle której mamy derywacje, to prowadzi bowiem do regresu: w pewnym momencie konieczne jest odwołanie się do intuicyjnej identyfikacji dowodu realnego z danym dowodem formalnym. I cały problem powraca na nowym poziomie.

5. PODSUMOWANIE

Koncepcja Azzouniego nie stanowi dobrego wyjaśnienia statusu dowodów matematycznych. Nie pokazuje, jaką poznawczą rolę miałyby pełnić owe formalne derywacje. Z punktu widzenia praktyki matematycznej teza, że to istnienie formalnej derywacji czyni daną argumentację matematyczną prawomocną jest sztuczna. Koncepcja Azzouniego jest też bezsilna wobec problemu eksplanacyjnej funkcji dowodów. Można zatem nadal zasadnie twierdzić, że dowody matematyczne zawierają nieredukowalny składnik semantyczny, a podjęta przez Azzouniego próba jego eliminacji nie powiodła się.

LITERATURA

Azzouni, J.

[2004] „The derivation–indicator view of mathematical practice", *Philosophia Mathematica*, 3 (12), s. 81–105.

Boolos, G.

[1987] „A curious inference", *Journal of Philosophical Logic*, 16, s. 1–12.

Brown, J.

[1999] *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures.* Routledge, StateNew York.

Copeland, B. J.

[2002] „Hypercomputation", *Minds and Machines*, 12, s. 461–502.

Ketland, J.

[2005] „Some more curious inferences", *Analysis* 65 (285), s. 18–24.

Mancosu, P.

[2001] „Mathematical explanation: problems and prospects", *Topoi*, 20, s. 97–117.

Rav, Y.

[1999] „Why do we prove theorems?" *Philosophia Mathematica*, 7, 1999, s. 5–41.

[2007] „A critique of a formalist–mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices", *Philosophia Mathematica* (III) 15, s. 291–320.

Rota, G-C.

[1997] „The phenomenology of mathematical proof", *Synthese*, 111, s. 183–196.

Stannett, M.

[2006] „The case for hypercomputation", *Applied Mathematics and Computation*, 178, s. 8–24.

Tymoczko, T.

[1979] „The four–color problem and its philosophical significance", *The Journal of Philosophy*, 76 (2), s. 57–83.

Wójtowicz, K.

[2011] „Dowód matematyczny — argumentacja czy derywacja? (I)", *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* nr 49, 2011, s. 63–80.

SUMMARY

MATHEMATICAL PROOF — ARGUMENTATION OR DERIVATION? — PART II

In the first part of the paper, Azzouni's *derivation–indicator view* was presented. In the second part it is analyzed in a detailed way. It is shown, that many problems arise, which cannot be explained in a satisfactory way in Azzouni's theory, in particular the problem of the explanatory role of proof, of its epistemic role; the relationship between first–order and second–order versions of proofs is also not clear. It is concluded, that Azzouni's theory does not provide a satisfactory account of mathematical proof, but inspires an interesting discussion. In the article, some of the mentioned problems are discussed.