Geneza intuicjonistycznego rachunku zdań i Twierdzenie Gliwienki

Piotr Urbańczyk
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie

The Origin of Intuitionistic Propositional Calculus and Glivenko's Theorem

Summary

Among the non-classical logics, the intuitionistic one stands out in many ways. First of all, because of its properties, it is grateful subject of formal analysis. Moreover, there is small, but very significant group of mathematicians and philosophers who claim that intuitionistic logic captures the reasoning utilized in mathematics better than classical one. This article reveals the origins of intuitionistic propositional calculus – it was an outcome of formalization of certain ideas about foundations of mathematics. A large part of the article is devoted to Glivenko's Theorem – somewhat forgotten, but extremely interesting formal result regarding the relationship between the two logical calculi: classical and intuitionistic propositional logic.

Keywords

Glivenko's theorem, intuitionistic logic, intuitionistic propositional calculus

1. Wstęp

Spośród logik nieklasycznych logika intuicjonistyczna wyróżnia się pod wieloma względami. Przede wszystkim, ze względu na swe własności, jest wdzięcznym przedmiotem badań logicznych. Od czasów, gdy Brouwer i Heyting badali rozumowania intuicjonistyczne, do dziś jest przedmiotem żywego zainteresowania logików. Ponadto, jej filozoficzno-matematyczne uzasadnienie jest na tyle silne, że może skutecznie konkurować z ontologicznymi motywacjami arystotelesowskiej logiki klasycznej. Intuicjonizm, jako jedyna z wielu prób stworzenia całościowej filozofii dającej rozwiązania większości fundamentalnych problemów nękających matematykę na początku ubiegłego stulecia, jest do dziś aktualną teorią, wciąż znajdującą swoich zwolenników[1].

Przedmiotem niniejszej pracy jest jedno z najważniejszych twierdzeń mówiących o zależności między intuicjonistyczną logiką zdaniową a logiką klasyczną. Swą nazwę zawdzięcza temu, że po raz pierwszy sformułował i udowodnił je w 1929 roku ra-

[1] Zob. M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford 2000, s. 7.

dziecki logik i matematyk – Walerij Gliwienko. Praca Gliwienki dała asumpt późniejszym badaniom nad związkiem między tymi rachunkami dokonywanym przez Gödla i Gentzena.

W pracy ujawniono najpierw motywacje przyświecające utworzeniu logiki intuicjonistycznej – zrodziła się ona w wyniku formalizacji pewnych filozoficznych poglądów dotyczących podstaw matematyki. Jej powstanie i rozwój wiążą się ściśle z chęcią porównania sformalizowanego systemu intuicjonistycznego z systemem klasycznym, co starano się pokazać w rozdziale trzecim. Wielu filozofów i logików powstrzymuje się od stwierdzenia, że formalne konstrukcje logiczne pociągają za sobą (w ściśle logicznym sensie) określone filozoficzne konsekwencje[2]. Dlatego postarano się, by filozoficzne implikacje twierdzenia Gliwienki kończące niniejszą pracę miały charakter jak najbardziej ścisły i formalny. Najważniejszą z nich jest spostrzeżenie, że poprzez to twierdzenie klasyczna logika zdaniowa może w pewnym sensie zostać zredukowana do słabszej od niej logiki intuicjonistycznej.

[2] Por. J. Woleński, *Semantic Loops*, [w:] *Philosophy in Science. Methods and Aplications*, (red.) B. Brożek, J. Mączka, W. Grygiel, Copernicus Center Press, Kraków 2011.

2. Motywacje filozoficzne dla utworzenia intuicjonistycznego rachunku zdań

Logika intuicjonistyczna powstała jako rezultat formalizacji pewnych poglądów dotyczących podstaw matematyki, zwanych intuicjonizmem. Rozwijał się on w pierwszych dekadach ubiegłego stulecia i podobnie jak większość nurtów filozoficznych badań nad podstawami matematyki tamtego okresu, zrodził się jako reakcja na pewne antynomie dostrzeżone w teorii mnogości.

Stanowisko intuicjonistyczne jest odmienne od tego, które utrzymuje większość matematyków. Podstawowa różnica polega na odrzuceniu dla obiektów matematycznych istnienia niezależnego od ludzkiej myśli. Z punktu widzenia intuicjonizmu matematyka jest wolną aktywnością ludzkiego umysłu, a jej obiekty pewnymi konstrukcjami myślowymi. Dla przedmiotów matematyki „istnieć" znaczy „być skonstruowanym". Innymi słowy: matematyk może uznać istnienie danego obiektu, o ile posiada on konstrukcję (dowód), która go ustanawia.

Na podstawie filozoficznych założeń intuicjonizmu, twórca tego kierunku – Luitzen Egbertus Jan Brouwer – dokonał próby przebudowy matematyki. Zrekonstruowana w ten sposób matematyka nie przyjmowała istnienia innych zbiorów nieskończonych, jak tylko przeliczalnych. Umysł ludzki nie jest w stanie dokonać nieskończenie wielu konstrukcji naraz. Zbiór nieskończony rozumiany był więc jako reguła, według której można podać każdy kolejny jego element. Brouwer odrzucił także metodę aksjomatyczną, jako metodę budowania matematyki. Nie wystarczy bowiem postulować istnienie obiektów i ich własności, trzeba obiekty o takich własnościach wpierw skonstruować.

Zgodność intuicjonistycznie zrekonstruowanej matematyki z matematyką klasyczną była dla Brouwera kwestią drugorzędną. I rzeczywiście, matematyka intuicjonistyczna istotnie różniła się od klasycznej. Nie tylko odebrała jej wiele obszarów badań, lecz także dowiodła kilku wyłącznie intuicjonistycznych tez. Podczas gdy intuicjonistyczna arytmetyka jest podsystemem arytmetyki klasycznej, sytuacja analizy jest zupełnie inna. Nie wszystkie twierdzenia klasycznej analizy są twierdzeniami analizy intuicjonistycznej, ale również nie wszystkie twierdzenia analizy intuicjonistycznej są do przyjęcia na gruncie klasycznym.

Brouwer nie zbudował logiki intuicjonistycznej, ale był twórcą tzw. słabych kontrprzykładów oraz dowiódł pierwszego twierdzenia tej logiki: $\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$[3]. Słabe kontrprzykłady miały posłużyć do odrzucenia niektórych twierdzeń logiki klasycznej, w szczególności prawa wyłącznego środka i silnego prawa podwójnej negacji. Zostały nazwane „słabymi", ponieważ nie obalały wprost tych twierdzeń, lecz wskazywały, że przy budowaniu dowodów konstruktywnych nie ma potrzeby, by uważać je za prawdziwe.

---

[3] D. van Dalen, *Intuitionistic Logic*, [w:] *Handbook of Philosophical Logic*, (red.) D.M. Gabbay, F. Guenther, wyd. 2, vol. 5, Springer, Dordrecht 2002, s. 3.

W celu tworzenia kontrprzykładów Brouwer posługiwał się często jakimiś nierozstrzygniętymi stwierdzeniami matematycznymi, np. hipotezą Goldbacha (hipotezą, że każda parzysta liczba naturalna większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych). Wdzięcznym narzędziem budowania kontrprzykładów okazała się także liczba π, ponieważ bardzo mało wiadomo o jakichkolwiek regularnościach w jej rozwinięciu dziesiętnym.

Poniższy kontrprzykład ma wskazywać na bezzasadność używania prawa wyłączonego środka: $A \vee \neg A$. Niech k będzie parzystą liczbą naturalną większą od 2 taką, że k nie jest sumą dwóch liczb pierwszych. Zdefiniujemy teraz ciąg $a(n)$.

$$a(n) = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^n & \text{jeżeli } n < k \\ \\ (-\frac{1}{2})^k & \text{jeżeli } n \geqslant k \end{cases}$$

Ciąg ten jest zbieżny, a więc definiuje on jakąś liczbę rzeczywistą r. Gdyby hipoteza Goldbacha została udowodniona, r byłoby równe 0. Jednak póki nie posiadamy żadnego dowodu hipotezy Goldbacha, nie wiemy nic o r. Granica tego ciągu nie jest ani równa zeru, ani różna od zera; ani dodatnia, ani ujemna oraz nie jest ona ani wymierna, ani niewymierna. Innymi słowy, nie możemy stwierdzić, że:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}(x = 0 \vee x \neq 0)$, w szczególności

(b) $\forall x \in \mathbb{R}(x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0)$, oraz

(c) $\forall x \in \mathbb{R}(x \in \mathbb{Q} \vee x \notin \mathbb{Q})$.

Następny kontrprzykład wskazuje, iż dowód, że nie jest możliwe, że pewna własność nie jest możliwa nie jest w każdym przypadku dowodem tej własności. Innymi słowy, uderza on wprost w prawo podwójnego przeczenia: $\neg\neg A \to A$. Pod liczbą π podpisujmy ułamek $\rho = 0{,}\ 3333\ldots$ aż do momentu, gdy w rozwinięciu dziesiętnym π pojawi się sekwencja cyfr 0123456789.

$$\pi = 3{,}14159265\ldots0123456789\ldots$$
$$\rho = 0{,}33333333\ldots3333333333.$$

Jeśli cyfra 9 z pierwszej takiej sekwencji cyfr pojawia się na *k*-tym miejscu po przecinku, to

$$\rho = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}.$$

Matematyk klasyczny nie miałby oporów, by uznać, że ρ jest liczbą wymierną, rozumując w ten sposób, że nie jest możliwe, by ρ było niewymierne. Jego dowód wyglądałby następująco: Załóżmy, że liczba ρ nie jest niewymierna. Wtedy równość

$$\rho = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}.$$

nie zachodzi, a zatem sekwencja cyfr 0123456789 nie występuje w π. Jednak wtedy $\rho = 0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$, czyli ρ jest liczbą wymierną. Założenie, że ρ nie jest wymierne doprowadziło do sprzeczności. Dla intuicjonisty nie znaczy to jednak, że należy uznać, że ρ jest wymierne. Aby tego dokonać, należałoby podać takie liczby całkowite p i q, że $\rho = \frac{p}{q}$. Innymi słowy, by dowieść, że ρ jest wymierne, należałoby wpierw wskazać sekwencję cyfr 0123456789 w rozwinięciu dziesiętnym π lub udowodnić, że taka sekwencja nie występuje.

Konieczność odrzucenia prawa wyłączonego środka uznali także następcy Brouwera. Jego uczeń Arend Heyting przyczynę tego odrzucenia ilustruje następującym przykładem[4]: Zdefiniujmy dwie liczby naturalne, powiedzmy k i l.

(I) k jest największą liczbą pierwszą taką, że $k - 1$ jest również liczbą pierwszą lub $k = 1$, jeśli taka liczba nie istnieje.

(II) l jest największą liczbą pierwszą taką, że $l - 2$ jest również liczbą pierwszą lub $l = 1$, jeśli taka liczba nie istnieje.

Definicję (I) przyjmuje się zarówno w matematyce klasycznej, jak i intuicjonistycznej, bowiem k może zostać obliczone ($k = 3$). Natomiast nie ma żadnej metody wyliczenia l, ponieważ nie wiemy, czy ciąg tzw. liczb pierwszych bliźniaczych p, $p + 2$ jest skończony, czy nie. Matematyka klasyczna nie widzi w tym fakcie przeszkody, by przyjąć również definicję (II). W każdym możliwym do pomyślenia przypadku l jest zdefiniowana: albo istnieje nieskończenie wiele takich liczb (wtedy $l = 1$),

[4] Przykład ten pochodzi z A. Heyting, *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956, s. 2.

albo ich ciąg jest skończony (wtedy l jest równe największej liczbie pierwszej, takiej, że $l - 2$ jest również liczbą pierwszą). Takie przedstawienie sprawy nie może satysfakcjonować intuicjonistów. Uważają oni, że liczba jest dobrze zdefiniowana dopiero wtedy, gdy dana jest metoda jej obliczenia. Nie mogą więc przyjąć definicji (II).

Jak już zostało wspomniane, Luitzen Brouwer nie był twórcą logiki intuicjonistycznej. Warto dodać, że wbrew tradycyjnemu stanowisku uważał on, że logika nie leży u podstaw matematyki, lecz przeciwnie – jest od niej zależna. Nawet więcej – był on niechętny tworzeniu formalnych systemów logiki intuicjonistycznej. Uważał, że matematyczna aktywność ludzkiego umysłu ma charakter dynamiczny. Przedstawianie jej w języku logiki symbolicznej z jej charakterem statycznym jest z istoty nieadekwatne.

Przedstawiając intuicjonizm na tle innych stanowisk wypracowanych w filozofii matematyki, można powiedzieć, że od platonizmu odróżniał się on uznawaniem obiektów matematycznych za pewne umysłowe konstrukcje, którym nie przysługuje niezależne, idealne istnienie. W przeciwieństwie do formalizmu twierdził, że język jest wtórny wobec matematycznej aktywności ludzkiego umysłu – służy jedynie do zapamiętywania konstrukcji i komunikowania ich innym matematykom. W odróżnieniu od logicyzmu przyznawał matematyce niezależność od logiki twierdząc, że zachodzi wręcz przeciwna asymetria – logika jest częścią matematyki i jest zależna od matematycznego myślenia.

3. Rozwój intuicjonistycznego rachunku zdań

Ponieważ Brouwer nie był zainteresowany logiką, którą uważał za formę matematyki stosowanej, nigdy nie prowadził nad nią wyczerpujących badań, a w szczególności nigdy nie przeprowadził systematycznego porównania logiki intuicjonistycznej z logiką klasyczną, sformalizowaną np. w *Principia Mathematica* lub przez szkołę Hilbertowską. Tym, co motywowało innych do prób takiego porównania było opublikowanie przez Brouwera słabych kontrprzykładów, które naruszały także bardzo ogólne zasady matematyczne[5]. Oczywiście, by takie porównanie było możliwe, należało skodyfikować logikę intuicjonistyczną w system formalny.

Próby sprecyzowania intuicjonistycznych sposobów wnioskowań w postaci aksjomatycznego rachunku logicznego podjęli Walerij Gliwienko i Andriej Kołmogorow. Jednak prawdopodobnie pierwszym logikiem, który dokonał jakiegoś namysłu w tej kwestii był Paul Bernays. W liście do Heytinga przyznał, że po wykładach Brouwera w Getyndze w 1924 roku zastanawiał się, jak dałoby się osiągnąć rachunek logiczny zgodny z filozoficznymi założeniami twórcy intuicjonizmu. Bernays doszedł wtedy do wniosku, że taki rachunek można osiągnąć poprzez

[5] Zob. M. van Atten, *The Development of Intuitionistic Logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2009 Edition), (red.) E.N. Zalta, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/intuitionistic-logic-development/>.

porzucenie klasycznej formuły $\neg\neg A \rightarrow A$[6]. Jednak jego wynik nie został opublikowany a formalizacje (częściowe) logików radzieckich pozostały na Zachodzie bez echa.

Tymczasem formalizacja intuicjonistycznej logiki i matematyki stała się tematem na tyle interesującym, że Holenderskie Towarzystwo Matematyczne w 1927 roku uczyniło ją przedmiotem swego corocznego konkursu. Autorem nagrodzonego eseju został Arend Heyting. Podawał w nim aksjomatyzację intuicjonistycznego rachunku zdań i rachunku predykatów, intuicjonistycznej arytmetyki i teorii mnogości. Artykuł Heytinga został opublikowany w 1930 roku i dzięki niemu to on uchodzi za twórcę logiki intuicjonistycznej. Podana poniżej aksjomatyka jest różna od oryginalnej aksjomatyki Heytinga, jest jednak z nią równoważna[7].

Schematy aksjomatów intuicjonistycznego rachunku zdań (IRZ):

Ax_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

Ax_2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

Ax_3 $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$.

Ax_4 $A \wedge B \rightarrow A$.

Ax_5 $A \wedge B \rightarrow B$.

Ax_6 $A \rightarrow A \vee B$.

Ax_7 $B \rightarrow A \vee B$.

6 Zob. tamże.

7 Oryginalną aksjomatykę zaproponowaną przez Heytinga podaje np. M. van Atten, *The Development of Intuitionistic Logic*, dz. cyt.

Ax_8 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$.
Ax_9 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$.
Ax_{10} $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

Reguły wnioskowania:

$\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$; Reguła Odrywania (*Modus Ponens*).

Jasnym było, że logika intuicjonistyczna nie może akceptować wszystkich praw stosowanych na gruncie rachunku klasycznego, przede wszystkim tych, za których odrzuceniem stały słabe kontrprzykłady. Warto jednak zauważyć, że gdy do aksjomatyki IRZ dodamy mocne prawo podwójnej negacji

Ax_{11} $\neg\neg A \rightarrow A$

lub, równoważnie, prawo wyłączonego środka

$\mathrm{Ax}_{11'}$ $A \vee \neg A$

otrzymamy formalny system dla klasycznego rachunku zdań (KRZ). Prowadzi to bezpośrednio do wniosku, że IRZ jest podsystemem KRZ. Znaczy to, że każda formuła, która jest twierdzeniem IRZ, jest również twierdzeniem KRZ. Widać również wyraźnie, że nie zachodzi odwrotna asymetria – istnieją twierdzenia KRZ, które nie są twierdzeniami IRZ. Najbardziej znanymi klasycznymi twierdzeniami niedowiedlnymi intuicjonistycznie, są wymienione wyżej formuły: prawo wyłączonego środka i mocne prawo podwójnej negacji. Oprócz nich w rachunku intuicjonistycznym nie da się dowieść m.in. takich twierdzeń logiki klasycznej:

- $(\neg\neg A \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg A)$,
- $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$,
- $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$,
- $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$,
- $(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$,
- $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$,
- $\neg (A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$,
- $\neg (\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$,
- $\neg (\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$,
- $\neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$,
- $\neg (A \wedge \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$,
- $(\neg A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow A$.

Szybko zdano sobie sprawę, że logika intuicjonistyczna musi posiadać interpretację stałych logicznych odmienną niż w rachunku klasycznym. W objaśnieniu zasad tej interpretacji posługuje się raczej pojęciem dowodu, niż wartości logicznych. Z tego powodu nazywana jest ona *interpretacją dowodową* lub *interpretacją BHK* (od nazwisk jej twórców: Brouwera, Heytinga i Kołmogorowa). Dla rachunku zdań wygląda następująco:

1. Dowód zdania $A \wedge B$ polega na przedstawieniu dowodu zdania A oraz dowodu zdania B.
2. Dowód zdania $A \vee B$ polega na przedstawieniu dowodu zdania A lub dowodu zdania B.

3. Dowód zdania $A \rightarrow B$ jest konstrukcją, która pozwala na przekształcenie każdego dowodu zdania A w dowód zdania B.
4. Dowód zdania $\neg A$ jest konstrukcją, która każdy dowód zdania A przekształca w dowód zdania sprzecznego[8].

Przy czym, zgodnie z filozoficznymi zasadami intuicjonizmu, dowodem zdania A jest podanie konstrukcji, dzięki której możemy uznać je za prawdziwe. Należy jednak podkreślić, że podana interpretacja ma charakter nieformalny. Ścisłą definicję uzyskano wraz z podaniem aksjomatyki, wówczas jej interpretację wyznaczyły odpowiednie semantyki.

Początkowo twierdzono, że semantyka IRZ przyjmuje trzy wartości. Taką semantykę podawał sam Heyting. Udowodniono jednak, że jest ona nieadekwatna, tzn. uznaje za prawdziwe formuły, które z aksjomatów Heytinga nie wynikają. Autorem tego dowodu był Walerij Gliwienko. Jego wynik uogólnił Kurt Gödel, dowodząc, że każda semantyka intuicjonistyczna o skończonej liczbie wartości jest nieadekwatna[9].

Pierwszą semantyką, wobec której intuicjonistyczne rachunki logiczne okazały się pełne, była semantyka topolo-

---

[8] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, wyd. drugie, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001, s. 109–110; A. Pogorzelski, *Elementarny słownik logiki formalnej*, Dział Wydawnictw Filii UW, Białystok 1992, s. 223; M. van Atten, *The Development of Intuitionistic Logic*, dz. cyt.; A. Troelstra, *History of constructivism in the 20th century*, s. 12; D. van Dalen, *Intuitionistic Logic*, dz. cyt., s. 6.

[9] Zob. Z. Zawirski, *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny” 1939, 16, s. 204–205.

giczna. Za jej twórcę uważa się polskiego logika – Alfreda Tarskiego. Interpretacja topologiczna była rozwijana dalej przez polską szkołę (m.in. przez Helenę Rasiową i Romana Sikorskiego). W takiej semantyce zdania rachunku interpretuje się jako otwarte podzbiory przestrzeni topologicznej, natomiast operacje związane ze spójnikami logicznymi oraz kwantyfikatorami skojarzone są z pewną algebrą tych zbiorów. Już ta semantyka doprowadziła do ciekawych filozoficznie wniosków o związkach między logiką intuicjonistyczną i klasyczną. Jak zauważają Rasiowa i Sikorski, „to zaskakujące, że pewne idee filozoficzne doprowadziły do sformułowania logiki, której matematyczna treść pokrywa się z teorią krat otwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej”[10].

Do dnia dzisiejszego dla logiki intuicjonistycznej zbudowano wiele różnorodnych semantyk. Spośród nich warto wymienić choćby algebry Heytinga, czy matryce Jaśkowskiego. Współcześnie jedną z najczęściej używanych semantyk logiki intuicjonistycznej jest semantyka światów możliwych. Została utworzona w 1963 r. przez Saula Kripkego. Wykazała ona większą elastyczność od swoich poprzedniczek i lepiej nadawała się jako teoria modeli nie tylko dla rachunków intuicjonistycznych, lecz również dla wielu innych rachunków logicznych.

Sporym przełomem dla logiki intuicjonistycznej było odkrycie w 1934 r. przez Gerharda Gentzena dwóch alternatywnych

[10] H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Mathematics*, PWN, Warszawa 1970, s. 380. Tłumaczenie – P.U.

systemów dowodzenia – sytemu dedukcji naturalnej oraz rachunku sekwentów. Systemy te, oprócz tego, że były bardziej poręcznymi sposobami dowodzenia, lepiej obrazowały interpretacje, jakie intuicjoniści nadawali spójnikom logicznym.

Szybko zauważono pewne podobieństwo logiki intuicjonistycznej do logiki modalnej S_4. Warto dodać, że stało się to na długo przed wynalezieniem semantyki światów możliwych. Ustalono także pewne zależności pomiędzy logiką intuicjonistyczną a logiką klasyczną. Autorem tych ustaleń był Walerij Gliwienko. Umieścił je w pracy *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer* wydanej w Biuletynie Królewskiej Akademii Belgijskiej w 1929 roku. Gliwience udało się sformułować i udowodnić dwa twierdzenia:

Twierdzenie 3.1. Formuła A posiada dowód w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła o postaci $\neg\neg A$ posiada dowód w IRZ.

$$A \in DOW_{KRZ} \quad \text{wtw} \quad \neg\neg A \in DOW_{IRZ}.$$

Twierdzenie 3.1. formuła ¬A posiada dowód w KRZ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła o postaci $\neg A$ posiada dowód w IRZ.

$$\neg A \in DOW_{KRZ} \quad \text{wtw} \quad \neg A \in DOW_{IRZ}.$$

Pierwsze z nich nazywane jest w literaturze przedmiotu twierdzeniem Gliwienki. Jego dowód zasadniczo polega na udowodnieniu, że wszystkie podwójnie zanegowane aksjomaty

KRZ są tezami IRZ, oraz że reguła analogiczna do reguły odrywania (z podwójnie zanegowanymi przesłankami i wnioskiem) jest wyprowadzalna w IRZ. Za pomocą zbioru powyższych tez i wyprowadzonej reguły można w IRZ skonstruować dowód każdej formuły $\neg\neg A$ takiej, że A posiada dowód w KRZ.

Z opublikowaniem tego wyniku wiąże się pewna historia. Gliwienko korespondował z Heytingiem i początkowo chciał, by jego ustalenia znalazły się w poprawionym i przetłumaczonym wydaniu eseju nagrodzonego przez Holenderskie Towarzystwo Matematyczne. Później jednak zmienił zdanie pisząc do Heytinga, że wynik, który uzyskał jest niemalże trywialny, a jego dowód nieco przydługi[11] i że chce go opublikować niezależnie od artykułu Heytinga. Rzeczywiście, praca Gliwienki ukazała się pierwsza, a Heyting w swoim artykule odnosi się do niej. Podaje w nim oba twierdzenia Gliwienki, lecz nie przedstawia dowodu[12].

4. Implikacje filozoficzne twierdzenia Gliwienki

Z poczynionych w poprzednim rozdziale uwag na temat aksjomatyk logiki intuicjonistycznej i klasycznej jasno widać, że ta pierwsza jest podsystemem drugiej. Tym, co wydaje się najbardziej interesujące w twierdzeniu Gliwienki jest fakt, że

[11] Zob. M. van Atten, *The Development of Intuitionistic Logic*, dz. cyt.
[12] Zob. tamże.

umożliwia ono pewien sposób patrzenia na logikę klasyczną jako na część logiki intuicjonistycznej. Z filozoficznego punktu widzenia jest to zaskakująca obserwacja.

Tę obserwację uwydatnia wynik uzyskany przez Gödla w 1932 roku. Jak wiadomo, wszystkie spójniki KRZ są definiowalne w terminach $\wedge$ i $\neg$[13], a więc każdą formułę KRZ można zapisać za pomocą tych dwóch spójników. Z twierdzenia Gliwienki (w sposób nieoczywisty) wynika, że wszystkie tezy logiki klasycznej wyrażone wyłącznie za pomocą $\wedge$ i $\neg$ są tezami logiki intuicjonistycznej[14].

Można powiedzieć, że twierdzenie Gliwienki jest przekładem logiki klasycznej na logikę intuicjonistyczną. Każda teza A logiki klasycznej ma swój podwójnie zanegowany odpowiednik w logice intuicjonistycznej. Nie jest to jednak przekład w ścisłym tego słowa znaczeniu, ponieważ nie operuje on na podformułach A. Twierdzenie Gliwienki jest jednak na tyle silne, by dowieść, że

Twierdzenie 4.1. IRZ i KRZ są równospójne (*equiconsistent*).

Oznacza to, że jeśli jeden z tych rachunków jest sprzeczny, to sprzeczny jest również drugi. To, że sprzeczność systemu intuicjonistycznego musi pociągać sprzeczność systemu klasycz-

[13] Oczywiście, nie jest tak w przypadku IRZ, w którym spójniki nie są wzajemnie definiowalne.

[14] Dowód zob. w: S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1952, s. 493.

nego jest oczywiste z uwagi na to, że ten pierwszy jest podsystemem drugiego. Z drugiej strony, o ile w rachunku klasycznym udałoby się dowieść $A \wedge \neg A$, to w rachunku intuicjonistycznym musi znaleźć się teza $\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg A$, która spowoduje sprzeczność i tego rachunku.

Zależność, o której mówi twierdzenie Gliwienki, nie zachodzi dla rachunku predykatów. By

Twierdzenie 4.2. Dowolne zdanie A jest dowiedlne w klasycznym rachunku predykatów (KRP) wtw ¬¬A jest dowiedlne w intuicjonistycznym rachunku predykatów (IRP)[15].

było prawdziwe, należy dołożyć tzw. schemat przesunięcia podwójnej negacji (*double negation shift schema*)

$$\forall x \neg\neg B(X) \to \neg\neg\forall x B(x)^{16}.$$

Bardziej wyrafinowany przekład KRP na IRP podali w latach trzydziestych ubiegłego wieku, niezależnie od siebie, Kurt Gödel i Gerhard Gentzen. Obaj byli zainspirowani pracą Gliwienki z 1929 roku. Przekład ten kojarzy każdą formułę A z formułą $g(A)$ (niezawierającą $\vee$ i $\exists$) taką, że

[15] Zob. załącznik.
[16] Zob. J. Moschovakis, *Intuitionistic Logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, dz. cyt., URL =<http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/>.

1. $A \leftrightarrow g(A) \in DOW_{KRP}$[17],
2. $g(A) \leftrightarrow \neg\neg g(A) \in DOW_{IRP}$,
3. Jeśli $A \in DOW_{KRP}$, to $g(A) \in DOW_{IRP}$.

Dowód tych twierdzeń przebiega po indukcyjnej definicji funkcji $g(A)$:

- $g(A) = \neg\neg A$, gdy A jest formułą atomową,
- $g(A \wedge B) = (g(A) \wedge g(B))$,
- $g(A \vee B) = (g(A) \vee g(B))$,
- $g(A \rightarrow B) = (g(A) \rightarrow g(B))$,
- $g(\neg A) = \neg g(A)$,
- $g(\forall x A(x)) = \forall x g(A(x))$,
- $g(\exists x A(x)) = \neg\forall x \neg g(A(x))$,[18]

Wyniki Gödla i Gentzena, tak jak twierdzenie Gliwienki, wskazują, że oba systemy są równospójne, tzn. dla dowolnego B, jeśli $(B \wedge \neg B) \in DOW_{KRP}$ wtw $(g(B) \wedge \neg g(B)) \in DOW_{IRP}$.

Skoro po dodaniu do aksjomatów IRZ mocnego prawa podwójnej negacji lub prawa wyłączonego środka otrzymamy KRZ, naturalnym stało się pytanie, jakie logiki otrzymamy dodając do listy aksjomatów IRZ inną formułę. W ten sposób powstała cała klasa tzw. logik pośrednich (*intermediate logics*), np. logika Dummetta, która na liście aksjomatów, oprócz wszystkich

17 $(A \leftrightarrow B) \overset{\text{def}}{\equiv} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

18 Zob. J. Moschovakis, *Intuitionistic Logic*, dz. cyt.; S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, dz. cyt., s. 493–501.

aksjomatów intuicjonistycznych, posiada jeszcze paradoks implikacji $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. Wiadomo, że wszystkie logiki pośrednie są słabsze od logiki klasycznej[19] i że jest ich kontinuum. Klasa logik pośrednich jest o tyle wyróżniona, o ile logika intuicjonistyczna jest najsłabszą logiką, w jakiej obowiązują zarazem twierdzenie o dedukcji i reguła odrywania[20]. Studia nad klasą tych logik są zasadniczo kwestią czysto techniczną, istnieją jednak takie logiki pośrednie, które, mniej lub bardziej, przydają się w innych badaniach logicznych.

5. Zakończenie

Rozważania zawarte w niniejszej pracy pozwalają sądzić, że twierdzenie Gliwienki, które było głównym przedmiotem jej zainteresowania, jest nieco zapomnianym, lecz niezwykle ciekawym wynikiem formalnym mówiącym o zależnościach pomiędzy dwoma rachunkami logicznymi – klasyczną i intuicjonistyczną logiką zdaniową.

Ta ostania od lat 30. ubiegłego wieku przeżywa nieustanny rozwój. Od tamtej pory do dzisiaj istnieje – może niezbyt liczna, ale za to bardzo znacząca – grupa matematyków i filozofów matematyki twierdzących, że logika intuicjonistyczna oddaje rozu-

---

19 Zob. D. van Dalen, *Intuitionistic Logic*, dz. cyt., s. 53.

20 Zob. A. Olszewski, *O rozumieniu implikacji w klasie logik porządku i jego znaczeniu w dążeniu do pewności językowej*, Wydawnictwo Naukowe PAT, Kraków 1997, s. 50–51.

mowania stosowane w matematyce lepiej, niż klasyczna. W rozdziale 3. wymieniono kilka semantyk tej logiki, w których udało się udowodnić jej pełność. Regularność tych struktur zadziwia tym bardziej, że logika intuicjonistyczna powstała w wyniku formalizacji poglądów filozoficznych, a więc – z punktu widzenia matematyka czy logika – niejasnych i nieścisłych.

Najciekawszą implikacją filozoficzną twierdzenia Gliwienki jest fakt, że pozwala ono spojrzeć na KRZ jako na część IRZ. To spostrzeżenie jest o tyle zaskakujące, o ile ten drugi jest logicznie słabszy od pierwszego. Fakt ten najlepiej ukazuje wynik, do którego doszedł Gödel inspirując się pracą Gliwienki z 1929 roku. Wykorzystując twierdzenie Gliwienki dowiódł on, że gdy sformułujemy KRZ jedynie w terminach koniunkcji i negacji, system ten będzie podsystemem IRZ. Choć należy pamiętać, że interpretacja dwuwartościowego spójnika negacji jest odmienna w obu tych rachunkach.

Wynik formalny, jakim było twierdzenie Gliwienki, otworzył drogę do dalszych badań logicznych. Wspomniany wyżej Gödel oraz Gentzen, niezależnie od siebie, są autorami analogicznego wyniku dotyczącego zależności pomiędzy intuicjonistycznym i klasycznym rachunkiem predykatów, natomiast Kleene dokonał podobnego przekładu w ramach teorii liczb. Możliwość dalszych badań jednak na tym się nie kończy.

Bibliografia

Atten M. van, *The Development of Intuitionistic Logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2009 Edition), (red.) E.N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/intuitionistic-logic-development/>.

Dalen D. van, *Intuitionistic Logic*, [w:] *Handbook of Philosophical Logic*, (red.) D.M. Gabbay, F. Guenther, wyd. 2, vol. 5, Springer, Dordrecht 2002.

Dummett M., *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford 2000.

Heyting A., *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956.

Kleene S.C., *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1952.

Moschovakis J., *Intuitionistic Logic*, [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2010 Edition), (red.) E.N. Zalta, <http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/logic-intuitionistic/>.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, wyd. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Olszewski A., *O rozumieniu implikacji w klasie logik porządku i jego znaczeniu w dążeniu do pewności językowej*, Wydawnictwo Naukowe PAT, Kraków 1997.

Pogorzelski A., *Elementarny słownik logiki formalnej*, Dział Wydawnictw Filii UW, Białystok 1992.

Priest G., *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is*, wyd. 2, Cambridge University Press, New York 2008.

Rasiowa H., Sikorski R., *The Mathematics of Mathematics*, PWN, Warszawa 1970.

Troelstra A.S., *History of constructivism in the twentieth century*, ITLI Prepublication Series ML–1991–05, Amsterdam 1991.

Woleński J., *Semantic Loops*, [w:] *Philosophy in Science. Methods and Aplications*, (red.) B. Brożek, J. Mączka, W. Grygiel, Copernicus Center Press, Kraków 2011.

Zawirski Z., *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, „Kwartalnik Filozoficzny" 1939, 16, s. 165–222.