Rozumienie dowodu matematycznego a zagadnienie wyjaśnienia w matematyce

Krzysztof Wójtowicz
Zakład Filozofii Nauki, Instytut Filozofii UW

The Notion of Mathematical Proof and the Problem of Explanation in Mathematics

Abstract

In the article, I present two possible points of view concerning mathematical proofs: (a) the formal view (according to which the formalized versions of mathematical proofs reveal their "essence"); (b) the semantic view (according to which mathematical proofs are sequences of intellectual acts, and a form of intuitive "grasp" is crucial). The problem of formalizability of mathematical proofs is discussed, as well as the problem of explanation in mathematics – in particular the problem of explanatory *versus* non-explanatory character of mathematical proofs. I argue, that this problem can be analyzed in a fruitful way only from the semantic point of view.

Key words

mathematical proof, explanation in mathematics, explanatory proofs, mathematical intuition.

1. Dowody matematyczne: praktyka i teoria

Nie ulega wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki zasadnicze znacznie ma rozumienie pojęć matematycznych, proces identyfikowania relacji między nimi i swoistego „wnikania" w ich treść. Można powiedzieć że uprawianie matematyki to bardzo wyrafinowana analiza pojęć i – mówiąc nieco górnolotnie – badanie świata idei matematycznych. Z całą pewnością nie sprowadza się do „rachunków" (z czym niekiedy kojarzy się matematyka udręczonej młodzieży). Kiedy matematycy mówią o dowodach, zastanawiają się nad tym, czy dowód jest głęboki, czy „siłowy", czy wyjaśnia zjawiska, czy jedynie wykazuje pewien fakt, nie dając głębszego wglądu w naturę zagadnienia. Matematycy mówią o treści dowodu, a nawet o estetycznych wartościach dowodów, o swoistym pięknie zawartym w grze idei. Nie ulega też wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki mamy do czynienia z bardzo ciekawymi zjawiskami o charakterze psychologicznym – zarówno przy prowadzeniu własnych badań, jak i przy śledzeniu wyników czyjejś pracy. Można mówić o swoistych przebłyskach intuicji, „olśnieniach", dzięki którym możliwe staje się uchwycenie zasadniczej idei – niejako istoty – danej konstrukcji matematycznej, teorii czy dowodu. Nie ulega wątpliwości, że przy uprawianiu matematyki mamy do czynienia z przełamywaniem poznawczych barier – niezależnie od tego, czy dotyczą one zrozumienia tego, jak rozwiązać szkolne zadanie z geometrii, czy też zrozumienia zasadniczej idei dowodu hipotezy Poincarégo. Są to przeżycia znane wszystkim matematykom. Podstawą uprawiania matematyki (tworzenia nowych pojęć, formułowania i rozwiązywania problemów matematycznych, konstruowania nowych teorii) są więc pewnego typu akty intelektualne. Zrozumieć istotę dowodu to zrozumieć naturę tych aktów i wyjaśnić aspekty semantyczne – bo to one odgrywają zasadniczą rolę w uprawianiu matematyki.

Taki pogląd można uznać za klasyczny w historii filozofii i matematyki. Jego przedstawicielem był np. Kartezjusz, którego zdaniem fundamentem naszego poznania jest zdolność do ujmowania w aktach intelektualnych pewnych podstawowych prawd w jasny i wyraźny sposób[1]. Kryterium jasnego i wyraźnego widzenia stosuje się w szczególności do matematyki, zaś intuicja – swoista zdolność umysłu do ujmowania pewnych zdań jako prawd – jest w tym wypadku kluczowa. Jednak intuicja jest angażowana nie tylko przy uzasadnianiu prawd pierwotnych. Odwołanie do intuicji jest konieczne także w rozumowaniach, kiedy chcemy uzasadnić prawomocność danego kroku dowodowego: „owa oczywistość i pewność intuicji wymagana

[1] Podstawowe czynności naszego umysłu, za pomocą których „możemy nie obawiając się omyłki dojść do poznania rzeczy"; (Kartezjusz, *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy poprzez światło przyrodzone rozumu*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958, s. 12) to intuicja i dedukcja. Intuicję Kartezjusz określa jako „nie zmienne świadectwo zmysłów, lub zwodniczy sąd źle tworzącej wyobraźni, lecz tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy"; tamże.

jest nie tylko dla samych wypowiedzi, ale także dla jakichkolwiek rozumowań... Zdania [...] poznaje się [...] już to przy pomocy intuicji, już to przy pomocy dedukcji; same zaś pierwsze zasady tylko przy pomocy intuicji; natomiast ich odległe wnioski jedynie przy pomocy dedukcji"[2]. Można więc powiedzieć, że rozumowania matematyczne stanowią proces oparty na naszym rozumieniu pojęć, a nie na formalnych własnościach systemów symbolicznych. O prawomocności dowodu decyduje więc – mówiąc skrótowo – jego treść, a nie forma[3].

Istotę tego punktu widzenia można w czytelny sposób przedstawić na przykładzie geometrii. W znanej wszystkim ze szkoły geometrii elementarnej wszelkiego typu elementy poglądowe, wyobrażeniowe są w dowodach angażowane w sposób bardzo silny. Niekiedy wystarczy szkic, aby przekazać ideę dowodu w sposób przekonujący, zaś towarzyszące owemu szkicowi wyjaśnienia (formalne) wydają się być nieomalże zbędne. Mówiąc z pewną przesadą: pewność uzyskujemy nie poprzez wypisanie

[2] Tamże, s. 13–14.

[3] Owe akty intelektualne dotyczą nie tylko pojedynczych kroków dowodu. Kartezjusz pisze: „Dla uzupełnienia nauki należy wszystkie i poszczególne rzeczy, które odnoszą się do naszego celu, przeglądnąć ciągłym i nieprzerwanym ruchem myśli i objąć je w dostatecznym i uporządkowanym wyliczeniu... Dlatego przebiegnę je kilkakrotnie swego rodzaju ciągłym ruchem wyobraźni, która widzi od razu człony poszczególne w chwili, gdy do innych przechodzi, aż się nauczę od pierwszego stosunku do ostatniego tak szybko przechodzić, iż będę mógł niemal zupełnie bez pomocy pamięci objąć jednym spojrzeniem całość"; tamże, s. 31–32. Mamy więc do czynienia z aktem „ogarnięcia" całości dowodu.

dowodu, ale poprzez swoisty „wgląd w geometryczną istotę zagadnienia”[4]. Wyrazicielem tego typu opinii jest np. Jean-Victor Poncelet (1788–1867), który pisał: „W zwykłej geometrii [...] opisywana jest figura, nigdy nie tracimy jej z oczu, zawsze rozumujemy z użyciem wielkości i form, które są rzeczywiste, i nigdy nie dochodzimy do wniosków, które nie mogą być odzwierciedlone w wyobraźni lub przed naszymi oczyma za pomocą obiektów zmysłowych”[5]. Niezależnie od przesadności tego stwierdzenia, nie ulega wątpliwości, że zazwyczaj odwołujemy się do pewnej formy geometrycznej intuicji, zaś rozumienie sytuacji jest kluczowe w elementarnych rozumowaniach geometrycznych.

Jednak w miarę rozwoju matematyki do głosu coraz silniej zaczął dochodzić odmienny punkt widzenia. W tym nowym ujęciu kryterium poprawności dowodu stanowi zgodność z pewnymi określonymi formalnie regułami – nie zaś intuicyjna akceptacja. Widać to bardzo wyraźnie na przykładzie geometrii, gdzie postulat „intuicyjnego wglądu” został zastąpiony postulatem możliwości sformułowania dowodu czyniącego zadość pewnym czysto formalnym wymaganiom[6]. W tym

[4] Odrębną sprawą jest to, że niekiedy takie „dowody rysunkowe” bywają mylące.
[5] Cytat za M. Detlefsen, *Formalism*, [w:] *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, (red.) S. Shapiro, Oxford University Press, Oxford 2005, s. 265.
[6] Ważną rolę odegrał tu także rozwój algebry, w której dokonywano czysto symbolicznych operacji na wyrażeniach matematycznych (wykorzystując np. jednostkę urojoną, której nie nadawano realistycznej interpretacji). Nie ma tu jednak miejsca na prezentację historyczną.

kontekście warto wspomnieć o badaniach Pascha i Hilberta, w których ta zmiana paradygmatu staje się wyraźna. Pasch pisał: „Jeśli geometria ma naprawdę być nauką dedukcyjną, proces wnioskowania musi we wszystkich fragmentach być niezależny od znaczenia pojęć geometrycznych, podobnie jak musi być niezależny od diagramów; pod uwagę mogą być brane jedynie relacje wyrażane w twierdzeniach i definicjach. W czasie wnioskowania jest użyteczne i dopuszczalne, ale nie konieczne myślenie o znaczeniach terminów; faktycznie, jeśli jest to konieczne, to w ten sposób widoczna staje się niepoprawność dowodu”[7]. Postulat wyeliminowania elementów o charakterze „wyobrażeniowo-poglądowych” (i – *de facto* – nawet odwołań do treści pojęć) jest radykalnie odmienny od postulatu intuicyjnej kontroli nad krokami dowodowymi. Przytoczony wcześniej pogląd Ponceleta Pasch uznałby za całkowicie niedopuszczalny. Kontrola opierająca się na naszej intuicyjnej zdolności do postrzegania przejść dowodowych jako prawomocnych nie ma znaczenia z punktu widzenia oceny poprawności dowodu. Dowody – w szczególności dowody geometryczne – można (i należy!) traktować w czysto formalny sposób, podobnie jak przekształcanie wyrażeń algebraicznych zgodnie z regułami formalnymi. Jeśli zaś w jakimś dowodzie m u s i e l i b y ś m y odwołać się do naszego rozumienia treści

[7] M. Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig 1882, s. 98 (cytowane za M. Detlefsen, *Formalism*, dz. cyt., s. 250–251).

pojęć i intuicyjnego postrzegania sytuacji, jest to świadectwo tego, że w dowodzie jest po prostu luka[8].

W takim duchu utrzymana jest praca Hilberta *Grundlagen der Geometrie* (1899). Hilbert dokonuje tam formalizacji geometrii poprzez zinterpretowanie jej w terminach struktur liczbowych. W takim ujęciu szkice czy wizualizacje przestają mieć znaczenie dowodowe (zachowując oczywiście znaczenie heurystyczne). Po dokonaniu takiej reinterpretacji geometrii, dowody geometryczne mogły nabrać pełnej ścisłości. Zaś kryterium owej ścisłości jest katalog reguł dowodowych o formalnym charakterze. Mówiąc obrazowo: w miejsce rozważań geometrycznych dotyczących np. położenia figur względem siebie, styczności figur, przecinania się prostych etc. pojawiają

[8] Hahn podsumował ów proces pojawiania się nowej wizji dowodu w następujący sposób: „Ponieważ intuicja okazała się zwodnicza w tak wielu przypadkach i ponieważ twierdzenia akceptowane na mocy intuicji okazywały się fałszywe (na mocy wnioskowania logicznego), matematycy stawali się coraz bardziej sceptyczni w odniesieniu do intuicji. Uznali, że nie jest rzeczą bezpieczną opieranie jakiegokolwiek stwierdzenia matematycznego [...] na intuicyjnych przekonaniach. Pojawiło się dążenie do wyeliminowania intuicji z rozumowań matematycznych i całkowitej formalizacji matematyki. [...] [K]ażde nowe pojęcie matematyczne miało być wprowadzane przez czysto logiczne definicje; każdy matematyczny dowód przeprowadzany za pomocą czysto logicznych środków"; H. Hahn, *Empiricism, Logic and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht – London – Boston 1980, s. 93. Niezależnie od tego, iż jest to być może zbyt radykalna prezentacja owego procesu, nie ulega wątpliwości, że w matematyce nastąpiła istotna zmiana.

się procedury rozwiązywania pewnych równań algebraicznych (które mogą być – do pewnego stopnia – zmechanizowane)[9].

Mamy zatem ujęcie „kartezjańskie", akcentujące rolę aktów intelektualnych i ujęcie „formalistyczne", akcentujące konieczność – i fundamentalną wręcz rolę! – formalizacji dowodów i podające kryteria o charakterze formalnym. Rzeczywiście, nie ulega wątpliwości, iż istotną rolę w matematyce odgrywa formalizacja, zaś niektóre operacje matematyczne mogą być prowadzone w czysto formalny, niejako mechaniczny sposób. Z czysto formalnymi regułami rachunkowymi stykamy się w szkole (np. wiemy, że można przenieść dane wyrażenie na drugą stronę równania zamieniając znak owego wyrażenia, znane są nam rozmaite formalne reguły do-

[9] Należy pamiętać, że oczywiście istnienie tych reguł nie powoduje, iż matematyka staje się nauką o przekształcaniu niezinterpretowanych symboli, czysto formalną grą. Owa gra ma swoje źródła, gdyż reguły naszego myślenia mają charakter systemowy. Celem analizy logicznej ma być więc „stworzenie protokołu reguł, zgodnie z którymi przebiega nasze myślenie. Myślenie, tak się składa, przebiega równolegle do mówienia i pisania: tworzymy wypowiedzi i umieszczamy je jedną za drugą"; D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität" 1928, 6, s. 65–85. Angielskie tłumaczenie [w:] *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, (red.) J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 2002, s. 475. (Nie jest to bynajmniej radykalny formalizm w duchu np. Curry'ego). Można dodać, że postulat poszukiwania ścisłości i pewności w geometrii znalazł rozwinięcie i dojrzałą postać w programie Hilberta, którego celem było ugruntowanie matematyki jako takiej.

konywania przekształceń algebraicznych *etc.*)[10]. Mamy z tym do czynienia także w bardziej zaawansowanych działach matematyki, gdzie zdarzają się przekształcenia mające charakter nieomalże mechaniczny – których możemy dokonywać nie zastanawiając się nad ich znaczeniem. To sugeruje formalistyczne spojrzenie na istotę dowodzenia, jako na manipulację symbolami. W takim ujęciu dowód matematyczny byłby w gruncie rzeczy ciągiem operacji formalnych – czy ściśle: ciągiem napisów, będących wynikiem prowadzonych operacji. W badaniach logicznych tak właśnie patrzymy na dowody. Dzięki rozwojowi logiki, mamy do dyspozycji ogólny model wnioskowań matematycznych i szereg narzędzi służących do analizy tychże. Logiczna definicja dowodu jest klarowna: jest to ciąg formuł precyzyjnie zdefiniowanego języka formalnego, spełniającego pewne (zadane w sposób czysto składniowy) warunki. Definiując język formalny musimy określić odpowiednie klasy wyrażeń (termów, formuł, aksjomatów *etc.*), a także reguły tworzenia dowodów. Poprawność dowodu jest rozpoznawana poprzez zastosowanie kryteriów syntaktycznych, gdzie abstrahujemy od interpretacji, czy rozumienia treści dowodu. Abstrahujemy także od kwestii ograniczeń praktycznych (związanych np. z dostępnością papieru, wielkością pamięci komputera czy wiekiem

[10] Szkolny algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika ma charakter czysto mechaniczny: „Jeśli na danym etapie liczby się różnią, odejmuj mniejszą od większej. Powtarzaj czynność, do momentu, kiedy będą równe. Wypisz wynik”. Nie musimy rozumieć tego algorytmu, aby go skutecznie zastosować.

Wszechświata). Przy tej czysto logicznej analizie nie badamy zagadnienia, czy dowód formalny mógłby być faktycznie przez kogoś przeprowadzony, ani problemu, czy jakikolwiek matematyk poczułby się nim przekonany – pomijamy więc aspekty semantyczne i pragmatyczne.

Pojawia się zatem pewnego rodzaju napięcie między praktyką matematyczną a analizą teoriodowodową. Traktowanie dowodu matematycznego jako konstrukcji czysto formalnej niewątpliwie nie znajduje potwierdzenia w praktyce matematycznej. Jest oczywistą rzeczą, że dowody znane z praktyki matematycznej (z podręczników, artykułów naukowych, referatów *etc*.) mają ścisły charakter, jednak z pewnością nie są dowodami formalnymi (rozumianymi jako ciągi napisów przekształcanych zgodnie z czysto syntaktycznymi regułami). Język praktyki matematycznej to język naturalny wzbogacony o pewne symbole[11]. Matematycy tworzą dowody w języku zrozumiałym dla kolegów po fachu, nie w języku, jaki jest przedmiotem zainteresowania specjalistów od teorii dowodu[12]. Rekonstrukcja logiczna stawia sobie inne cele, niż sprawne komunikowanie idei doty-

---

[11] Może lepiej powiedzieć, że jest to pewnego typu mieszanka języka naturalnego i symbolicznego – jednak to nie „procentowa zawartość znaczków" jest tu istotna, ale fakt, że z całą pewnością nie jest to ciąg napisów czysto formalnych.

[12] Tak jest w każdym razie w wypadku „zwykłych" działów matematyki. Kiedy przedmiotem badania jest np. tworzenie systemów automatycznego dowodzenia twierdzeń, formalizacja jest konieczna. Jednak także tutaj na metapoziomie pojawiają się rozważania nieformalne.

czących np. geometrii różniczkowej czy rachunku prawdopodobieństwa – zaś dowód z zakresu geometrii różniczkowej ma za zadanie rozwiązanie problemu matematycznego w sposób przekonujący dla specjalistów – nie zaś podanie rekonstrukcji w ulubionej przez logika formie! Z pełną formalizacją (abstrahując od względów praktycznych) nie wiązałaby się żadna poznawcza korzyść[13]. Prawdopodobnie (prawie) żaden autor dowodu (z zakresu ww. geometrii różniczkowej czy innych działów „prawdziwej matematyki") nie byłby w stanie rozpoznać sformalizowanej wersji swojego własnego dowodu, a nawet gdyby uwierzył w to, iż przedstawia się mu tę właśnie formalizację, nie byłby nią raczej zainteresowany, uznając, iż leży ona poza obszarem badań jego dyscypliny. Jego przedmiotem zainteresowania jest bowiem rozwiązywanie problemów (z czym często wiąże się tworzenie nowych pojęć, metod dowodowych *etc.*) – a nie formalizowanie dowodów, które już zostały zaakceptowane. Przypuszczam, że gdyby nawet okazało się, że jakiś uznany dowód matematyczny wymyka się pełnej formalizacji (np. że mimo wieloletnich prób nie udało się podać formalizacji dowodu hipotezy Poincarégo w języku ZFC), nie wpłynęłoby to

[13] Gwoli wyjaśnienia: z punktu widzenia teorii dowodu pełne sformalizowanie twierdzenia byłoby koniecznym etapem do podjęcia badań nad tym dowodem i oczywiście pozwalałoby na wzbogacenie naszej wiedzy. Jednak z punktu widzenia praktyki matematycznej nie miałoby to żadnego sensu. To właśnie mam na myśli mówiąc o braku zysku poznawczego: dotyczy to stanu wiedzy matematyka (zaś odrębną sprawą jest to, że z punktu widzenia logika dokonanie takiej formalizacji może pozwolić na istotne wzbogacenie jego wiedzy).

na jego akceptację w środowisku specjalistów. Można nawet zaryzykować tezę, że gdyby w jakiś sposób wykazano, że formalizacja dowodu nie jest możliwa, specjaliści nie uznaliby tego faktu za dyskwalifikujący dla dowodu[14]. Zapewne stwierdziliby, iż z punktu widzenia ich dyscypliny problem został rozwiązany, zaś posiadany przez nich dowód jest przekonujący. To, że nie jest możliwe jego przetłumaczenie na język notacji logicznej – to już nie ich problem (to problem ciekawy dla logików, zajmujących się takimi rekonstrukcjami). Ich zadaniem jest zdobywanie nowej wiedzy na temat rozmaitości różniczkowalnych, rozwiązywanie otwartych problemów – a nie przeformułowywanie (skądinąd w pełni satysfakcjonujących) dowodów do postaci, jaką lubią logicy.

Dowody matematyczne znane z praktyki nie są więc sformalizowane. Z drugiej jednak strony, trudno zaprzeczyć temu, iż jesteśmy przekonani o zasadniczej formalizowalności dowodów matematycznych. Jeśli w dowodzie pojawia się luka, możemy ją wypełnić – i taki proces uszczegółowienia możemy przeprowadzić w sposób niezwykle pedantyczny. Nie są znane przypadki, w których autorzy dowodu oświadczają, że uściślenie dowodu nie jest możliwe, i że trzeba po prostu dać się unieść „nastrojowi dowodu", który wytworzy w nas poczucie przekonania. Dowodzenie nie jest zestawem zabiegów perswazyjnych, a matematyka nie jest postmodernistyczną publicystyką. Choć

[14] Nie podejmuję tu problemu, co znaczy, że wykazano, iż formalizacja nie jest możliwa.

więc w praktyce dowody nie są przesadnie sformalizowane, to jednak matematycy są przekonani, iż takie pełne uściślenie dowodu jest możliwe. Co do zasady są więc przekonani, że dowody matematyczne dają się sformalizować[15]. Najczęściej też przyjmuje się, że ramy takiej rekonstrukcji formalnej są wyznaczone przez teorię mnogości[16]. Można więc powiedzieć, że dowodom „z życia" odpowiadają (potencjalne) dowody sformalizowane. Pojawia się więc pytanie o naturę „mostu Hilberta", który łączy „dwa królestwa: formalne królestwo obiektów syntaktycznych… z królestwem nieformalnego dyskursu matematycznego"[17].

Postulat sformułowania uniwersalnych, ogólnie przyjętych ram dowodowych ma swoje źródło w potrzebie klarownego ustalenia standardów matematycznej argumentacji, ustalenia „kodeksu postępowania matematycznego" – i w szczególności uwolnienia matematyki od elementów czysto subiektywnych. Jeszcze w wieku XIX owe standardy nie były do końca jasne, zaś zabiegi m.in. Pascha i Hilberta miały tę trudność

[15] Indukcyjnego argumentu na rzecz tej tezy dostarczają badania dotyczące formalizowania obszernych fragmentów matematyki (w szczególności polski projekt Mizar).

[16] W wielu przypadkach taka formalizacja może się odbywać z użyciem słabszych systemów formalnych – np. fragmenty teorii liczb można sformalizować w arytmetyce Peano, zaś znaczące fragmenty matematyki w arytmetyce drugiego rzędu. Szczegóły techniczne nie mają w kontekście tej dyskusji większego znaczenia: ważne jest to, że w ogóle można dokonać takiej formalizacji.

[17] Y. Rav, *Why do we prove theorems?*, „Philosophia Mathematica" 1999, 7, s. 31.

usunąć[18]. Z tego punktu widzenia teza o zasadniczej formalizowalności dowodów matematycznych może być postrzegana jako postulat metodologiczny.

Zauważmy jednak, że możemy ową tezę interpretować na dwa różne sposoby – odzwierciedlające nasze rozumienie tego, czym jest dowód matematyczny i jaka jest jego natura. Możemy bowiem ową tezę traktować jako:

(a) tezę ujawniającą istotę dowodów matematycznych;
(b) postulat o charakterze normatywnym.

Ad (a). Z tego punktu widzenia teza o zasadniczej formalizowalności stanowi po prostu tezę o charakterze empirycznym, która ujawnia posiadanie przez wszystkie dowody matematyczne pewnej wspólnej cechy: są one formalizowane. Można powiedzieć, że jest to teza zawierająca definicję sprawozdawczą dowodu matematycznego, jako rozumowania, które podlega formalizacji. To odróżnia rozumowania matematyczne od – najbardziej nawet przekonujących – analiz prawniczych, socjologicznych czy psychologicznych. Można powiedzieć, że w myśl tej tezy, „w tle" każdego zwykłego dowodu tkwi jego (potencjalna) formalna wersja[19]. W pewnym sensie nasze do-

[18] Pamiętamy spory dotyczące np. metod niekonstruktywnych, dyskusję na temat pewnika wyboru z pierwszych lat XX wieku etc. Prace Pascha i Hilberta stanowią jeden z etapów (czy: nurtów) procesu rygoryzacji matematyki.

[19] Tak sprawę stawia Azzouni w pracy *The derivation-indicator view of mathematical practice*, „Philosophia Mathematica" 2004, 3 (12),

wody są jedynie swoistymi skrótami dla owych prawdziwych dowodów, leżących u podłoża naszego – mówiąc żartobliwie – „machania rękami". Zaś tym, co powoduje, że nasze dowody są skutecznym środkiem argumentacyjnym jest właśnie istnienie owego dowodu formalnego w tle, który jest uprawdziwiaczem dla twierdzenia. Analizy pojęciowe prowadzone przez matematyków mają swoje ugruntowanie w tych systemach[20].

---

s. 81–105: dowody matematyczne są pewnego rodzaju skrótami dla dowodów sformułowanych w pewnych systemach algorytmicznych. Azzouni nazywa swoją koncepcję „derivation-indicator view". Zdaniem Azzouniego, realnie badane dowody są w gruncie rzeczy pewnymi wskaźnikami (stąd: *indicator*) istnienia stosownej procedury obliczeniowej stanowiącej idealną wersję dowodu (stąd: *derivation*). Ta procedura jest określona w pewnym systemie algorytmicznym. Azzouni pisze więc „jeśli dowody w gruncie rzeczy stanowią narzędzia, za pomocą których matematycy przekonują siebie nawzajem o istnieniu takiej czy innej mechanicznie weryfikowalnej derywacji, fakt ten wystarczy do wyjaśnienia, dlaczego matematycy zgadzają się ze sobą co do tego, kiedy pewien dowód faktycznie dowodzi pewnego twierdzenia" (tamże, s. 84). Tezy Azzouniego można interpretować w taki sposób, że znany nam realny dowód stanowi argument na rzecz istnienia takiej derywacji „w takim czy innym nieformalnie określonym systemie algorytmicznym" (tamże, s. 85). Analizę koncepcji Azzouniego Czytelnik znajdzie w pracach: Y. Rav, *A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices*, „Philosophia Mathematica" 2007, 15, s. 291–320 i K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, seria Monografie Fundacji Na Rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2012.

[20] Odrębną sprawą jest pytanie dotyczące poznawczych mechanizmów, które „na powierzchni" ujawniają się w formie pojęciowych analiz, stanowiąc reprezentację pewnych algorytmicznych mechanizmów „w tle". Jest to znacznie szerszy problem z zakresu filozofii umysłu.

Ad (b). Z tego punktu widzenia postulat o formalizowalności stanowi postulat metodologiczny, definiujący zakres pojęcia dopuszczalnej argumentacji w matematyce. O tym, czy dany dowód jest „legalny” stanowi to, czy daje się sformalizować. Formalizacja stanowi rękojmię (i warunek konieczny) akceptowalności dowodu. Pojawia się pytanie o status tego postulatu: czy byłby on zaakceptowany przez matematyków w takiej postaci? Wydaje się – że raczej nie. W praktyce matematycznej matematycy akceptują dowody bynajmniej nie dlatego, że ktoś wskazał formalizację tego dowodu. To w ogóle nie odgrywa żadnej roli, matematycy nie są zainteresowani formalnymi odpowiednikami ich dowodów. Celem dowodu matematycznego jest bowiem przekazywanie idei, a nie tworzenie formalizacji[21].

Powyższe rozważania dotyczą w gruncie rzeczy tego, czym są dowody matematyczne i jaka jest ich istota. Można tu wskazać dwa przeciwstawne punkty widzenia.

[21] Barwise pisze iż „pomysł, aby rozumowanie mogło zostać w jakiś sposób zredukowane do postaci czysto syntaktycznej w pewnym formalnym, sztucznie skonstruowanym języku jest stosunkowo nowym pomysłem w historii matematyki. Wyrasta z programu Hilberta. Dowody matematyczne istniały przez tysiące lat zanim pojawili się logicy i zmatematyzowali to pojęcie. [...] O żadnym systemie nie można powiedzieć, że to właśnie on jest tym rzeczywistym pojęciem dowodu, ponieważ istnieją niekończące się warianty [...]. One wszystkie nie mogą być rzeczywistym pojęciem dowodu [...] istnieją dobre dowody, które nie są modelowane w żadnym współczesnym systemie dedukcyjnym”; J. Barwise, *Mathematical proofs of computer system correctness*, „Notices of the American Mathematical Society” 1989, 36, s. 844–851; cytowanie za Y. Rav, *A critique of a formalist-mechanist...*, dz. cyt., s. 302.

(1) Prawdziwe dowody to znane z praktyki dowody nieformalne. One są źródłem wiedzy matematycznej. Ich formalne wersje nie są poznawczo istotne – stanowią jedynie pewnego typu artefakty, pojawiające się przy okazji (meta)analizy prowadzonej przez logików. Z punktu widzenia praktyki matematycznej są jedynie sztucznymi imitacjami prawdziwych dowodów i prawdziwej matematyki[22].

(2) To formalne dowody stanowią o istocie dowodu – i to one są prawdziwymi dowodami. Nieformalne dowody stanowią jedynie pewnego rodzaju skróty, wskaźniki (tak jak twierdzi Azzouni, por. przypis xxx), zaś akceptujemy je jedynie dlatego, że wiemy, iż mogą zostać sformalizowane. Formalizacja odkrywa ich prawdziwą naturę. Zaś fakt, że matematycy zadowalają się dowodami nieformalnymi stanowi ciekawe zjawisko psychologiczne – ale nie odkrywa prawdziwej natury dowodów.

Rozstrzygnięcie tego zagadnienia nie jest możliwe w tym tekście – i być może w ogóle nie jest możliwe… Zapewne oba punkty widzenia ukazują ważne aspekty zagadnienia i ukazują pewien fragment prawdy na temat natury dowodu.

[22] Mówiąc metaforycznie: formalna wersja dowodu nie ujawnia jego istoty, podobnie jak zapis zdjęcia gór w postaci ciągu zerojedynkowego nie ujawnia bezpośrednio ich piękna.

2. Problem wyjaśniania w matematyce

Problem wyjaśniania jest jednym z centralnych problemów w filozofii nauki, jednak w filozofii matematyki jest on podejmowany w stopniu stosunkowo znikomym. Jedna z nielicznych prac na ten temat to artykuł[23], w którym autor posługuje się pojęciem dowodu wyjaśniającego (*explanatory proof*)[24]. Steiner omawia to zagadnienie na przykładzie dowodu identyczności dwóch zbiorów (przy czym problem jest wyraźniej postawiony, kiedy będzie mowa o koekstensjonalności dwóch własności). Wyjaśnienie owej koekstensjonalności będzie możliwe dzięki wykazaniu związku między własnościami. Jeśli natomiast nie uda się takiego związku wykazać, to nawet jeśli podamy dowód identyczności odpowiednich zbiorów, ów dowód nie będzie miał charakteru wyjaśniającego[25].

Inną pracą podejmującą problem wyjaśnienia jest artykuł autorstwa Resnika i Kushnera[26]. Autorzy nawiązują w niej do

[23] M. Steiner, *Mathematics, explanation and scientific knowledge*, „Nous" 1978, 12, s. 17–28.

[24] Nie znaczy to bynajmniej, że dopiero Steiner zwrócił uwagę na fakt, iż pewne dowody mają taki charakter, a inne nie. Rozróżnienie na argumenty wyjaśniające i jedynie wymuszające zgodę jest znane od starożytności.

[25] Można dodać: w tej sytuacji będziemy wiedzieć, że dwa zbiory są identyczne, ale fakt ten nie będzie się nam jawił jako bardziej naturalny, niż gdyby było inaczej.

[26] M.D. Resnik, D. Kushner, *Explanation, independence and realism in mathematics*, „British Journal for the Philosophy of Science" 1987, 38 (2), s. 141–158.

analiz Steinera, odnotowując fakt, iż „matematycy żądają wyjaśnień czysto matematycznych problemów i takowe oferują; niektóre dowody są bardzo pouczające podczas gdy inne są raczej nieprzejrzyste”[27]. W odniesieniu do problemu wyjaśniania w matematyce Resnik i Kusher zauważają, iż:

> (1) Jeśli uznamy, że systematyzacja stanowi wyjaśnianie (w każdym razie tak możemy to pojęcie rozumieć w jednym z jego znaczeń) – to w matematyce spotykamy się z wyjaśnianiem. Nie ulega bowiem wątpliwości, że tworzone są teorie systematyzujące (wcześniej luźno powiązane i rozproszone) wyniki.[28]
> (2) W matematyce możemy zasadnie stawiać pytania typu „dlaczego…?”. Możemy uzyskiwać odpowiedzi na takie pytania za pośrednictwem dowodów, ale nie tylko: pewne zjawiska matematyczne można wyjaśniać poprzez odwołanie się np. do możliwości (re)interpretacji pojęć. Autorzy podają tutaj przykład definicji dodawania w terminach sum zbiorów: ich zdaniem stanowi ona dobre wyjaśnienie przemienności i łączności dodawania. Podają też przykład dowodu twierdzenia o wartości średniej, dla którego kluczowe jest założenie dotyczące spójności zbioru.

[27] Tamże, s. 142.

[28] Z tego typu procedurami wyjaśniającymi mamy do czynienia np. wtedy, kiedy dokonuje się aksjomatyzacja teorii: dzieje się to zazwyczaj wtedy, kiedy już posiadamy pewną liczbę wyników, dla których poszukujemy podstawy w postaci fundamentalnych zasad leżących u ich podłoża. Jest to mechanizm powszechny w matematyce – nie tylko w fazie aksjomatyzacji formalnej, ale przy porządkowaniu pola pojęciowego teorii.

Ponieważ jedynymi spójnymi podzbiorami **R** są przedziały (i półproste oraz cały zbiór **R**), ten fakt stanowi wyjaśnienie, dlaczego twierdzenie to nie zachodzi dla innych podzbiorów **R.** Nie jest to wyjaśnienie przez dowód, raczej przez kontrprzykłady wskazujące na rolę istotnych założeń w dowodzie.

(3) Wyjaśnienia w matematyce często polegają na wskazaniu pewnego zestawu wyników, opatrzonych odpowiednim komentarzem – a nie jedynie pojedynczych twierdzeń[29]. Można byłoby więc powiedzieć, że to całe teorie czy koncepcje matematyczne stanowią wyjaśnienie[30].

Niezależnie od szczegółowych uwag dotyczących dowodów wyjaśniających, Resnik i Kushner formułują pewną ogólną obserwację dotyczącą dowodów matematycznych: wszystkie (można tu dodać: poprawne) dowody mają charakter przekonujący – dowiadujemy się dzięki nim, że dany fakt zachodzi. Jednak niektóre z dowodów pozostawiają nas w stanie swoistego zdumienia, d l a c z e g o ów fakt zachodzi. Wynika to z faktu,

---

[29] Przykładem podanym przez autorów jest zagadnienie kategoryczności arytmetyki drugiego rzędu, skonfrontowane z brakiem kategoryczności arytmetyki pierwszego rzędu. Różnią się one tym, że w arytmetyce drugiego rzędu mamy pełen aksjomat indukcji, natomiast w arytmetyce pierwszego rzędu schematy aksjomatów indukcji. Fakt ten wyjaśnia różnice, ale nie można uznać, iż to pojedyncze twierdzenie (czy pojedynczy dowód) stanowi wyjaśnienie: raczej cała grupa dowodów.

[30] Tamże, s. 151–152.

że mogą istnieć dowody, które są w pełni poprawne, ale zarazem nie ujawniają istoty zagadnienia[31].

W systematyczny sposób problem wyjaśniania podejmowany jest w pracy Mancosu[32]. Formułuje on 5 zasadniczych pytań dotyczących wyjaśniania w matematyce:

(1) Czy w matematyce występują wyjaśnienia?
(2) Jaką przybierają formę?
(3) Czy problem wyjaśniania to nowość w filozofii matematyki?
(4) Jakie są filozoficzne podejścia do problemu wyjaśniania w matematyce?
(5) Jaka jest zależność między wyjaśnianiem w matematyce a teoriami wyjaśniania w nauce?[33]

Autor wyraźnie odróżnia dowody, które wyjaśniają od takich, które wprawdzie dowodzą (można powiedzieć: wymuszają naszą zgodę na pewien fakt), ale nie wyjaśniają głębszych

---

31 „Matematycy nie odkrywają dowodów poprzez dedukowanie na ślepo wniosków ze znanych wcześniej wyników, raczej najpierw starają się poznać strukturę matematyczną, w ten sposób są w stanie zobaczyć, co jest o niej prawdziwe, i jak te podstawowe prawdy wynikają z jej podstawowych własności"; tamże, s. 153–154.
32 P. Mancosu, *Mathematical explanation: problems and prospects*, „Topoi" 2001, 20, s. 97–117.
33 Tamże, s. 98.

przyczyn tego faktu[34]. Mancosu odnosi się także do problemu metodologicznej spójności (czy: jednolitości) dowodów – np. aby metody nieelementarne nie ingerowały wtedy, kiedy nie jest to konieczne, gdyż mogą zaburzać nasze rozumienie danej sytuacji matematycznej[35].

Mancosu w swoich analizach nawiązuje do faktu, iż w matematyce zdarza się, iż motywacje dla przyjęciach takich a nie innych aksjomatów wynikają ze względów metodologicznych: kryterium jest nie tyle ich oczywistość, co raczej rola w danej

[34] Mancosu odwołuje się tutaj do rozważanej przez Pringsheima propozycji nowego ujęcia teorii funkcji analitycznych zespolonych, które miało (zdaniem Pringsheima) umożliwić naturalne wyjaśnienie szeregu faktów z zakresu analizy zespolonej. Pisał m.in., iż dzięki temu ujęciu „podstawowe fakty, które w teorii Cauchy'ego pojawiają się jako sensacyjne wyniki działania tajemniczego mechanizmu prowadzącego do cudownych zjawisk, w ramach naszej teorii uzyskują naturalne wyjaśnienie"; A. Pringsheim, *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Zweiter Band, Erste Abteilung: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, B.G. Teubner, Leipzig – Berlin 1925, s. V (cytowanie za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt., s. 109). W swojej pracy Mancosu przedstawia dość szczegółowo koncepcję Pringsheima (por. też K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, dz. cyt.). Odrębną sprawą jest to, że propozycja Pringsheima raczej nie znalazła uznania „na rynku idei matematycznych".

[35] Następujący przykład pozwoli na wyjaśnienie tego komentarza. Zauważmy, że twierdzenia szkolnej geometrii euklidesowej (np. że prosta jest styczna do okręgu) możemy dowodzić właśnie metodami geometrycznymi, ale także poprzez zastosowanie technik geometrii analitycznej. Po przetłumaczeniu na język geometrii analitycznej możemy odwoływać się do różnych silniejszych wyników matematycznych, także bardzo abstrakcyjnych. Z punktu widzenia pierwotnego problemu geometrycznego, te techniki nie wnoszą rozumienia, w zasadzie jedynie zaciemniają obraz (choć dają dowód).

teorii (można powiedzieć: rola porządkująca). Mancosu przywołuje tutaj m.in. stanowiska Russella[36] i Gödla.

Odnosząc się do koncepcji Gödla, Mancosu ma na myśli oczywiście kryterium owocności jako pragmatyczne kryterium przyjęcia aksjomatów w danej teorii. W swoim komentarzu do koncepcji matematyki Russella, Gödel pisze, iż ten „porównuje ...aksjomaty logiki i matematyki z prawami przyrody, a oczywistość logiczną z percepcją zmysłową, tak że aksjomaty nie muszą koniecznie być oczywiste same przez się, ale ich uzasadnienie bazuje (dokładnie tak, jak w fizyce) na fakcie, iż pozwalają one wydedukować te ‘dane zmysłowe’”[37]. Mamy zatem do czy-

[36] „Kiedy badamy zasady matematyki [...] mamy tendencję do wiary w przesłanki, ponieważ widzimy, że ich konsekwencje są prawdziwe, zamiast wierzyć we wnioski, ponieważ przesłanki są prawdziwe. Jednak wyprowadzanie przesłanek z wniosków jest istotą indukcji, a zatem metodą badań zasad matematyki jest metoda indukcyjna, zasadniczo identyczna z metodą odkrywania ogólnych praw w dowolnej nauce”; B.A.W. Russell, *Essays in Analysis*, (red.) D. Lackey, George Allen & Unwin, London 1973, s. 273–274 (cytowanie za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt.). „Gdy czysta matematyka jest zorganizowana jako system dedukcyjny [...] staje się oczywiste, że nie wierzymy w prawdy czystej matematyki tylko dlatego, że wierzymy w prawdziwość przesłanek. Niektóre z przesłanek są mniej oczywiste niż ich konsekwencje i wierzymy w nie głównie ze względu na ich konsekwencje. Tak jest zawsze, kiedy nauka jest przedstawiona jako system dedukcyjny. [...] Nasze racje dla wierzenia w logikę i czystą matematykę są, po części, indukcyjne”; B.A.W. Russell, *Logical Atomism*, [w:] *Contemporary British Philosophy*, (red.) J. M. Muirhead, George Allen & Unwin, London 1924, przedrukowane [w:] *Logic and Knowledge*, (red.) R.C. Marsh, London, George Allen & Unwin, s. 325–326 (cytowane za P. Mancosu, *Mathematical explanation...*, dz. cyt.).

[37] K. Gödel, *Russell's Mathematical Logic*, [w:] *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living philosophers*, vol. 5, (red.) P.A.

nienia z zasadą o charakterze heurystycznym: uzasadnieniem (i swoistym wyjaśnieniem) dla danego aksjomatu jest to, że posiada on owocne konsekwencje[38].

3. Uwagi końcowe

Moim zdaniem analizy dotyczące pojęcia wyjaśniania w matematyce będą znacznie bardziej owocne, jeśli zostaną oparte o „treściową" koncepcję dowodu. Samo istnienie dowodu nie stanowi bowiem jeszcze wyjaśnienia – i tym bardziej takiego wyjaśnienia nie stanowi istnienie dowodu formalnego. Z punktu widzenia praktyki matematycznej, znacznie ważniejsza jest analiza pojęć matematycznych. Zarazem dobre ujęcie problematyki wyjaśnienia jest trudne, ponieważ kategorie znane z nauk empirycznych nie mogą być tu zastosowane wprost – zaś kategoria wyjaśnienia ma charakter po części psychologiczny. Mimo tych trudności (a może właśnie dlatego), problem wyjaśniania w matematyce – w szczególności problem eksplanacyjnej roli dowodów matematycznych – uważam za jeden z kluczowych problemów przy poszukiwaniu istoty matematyki.

Schlipp, Open Court Publishing Company, La Salle, Ill. 1944. Polskie tłumaczenie [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 81.

[38] Podobne myśli znajdziemy u Lakatosa, na co zwraca uwagę Mancosu (por. też K. Wójtowicz, *O pojęciu dowodu w matematyce*, dz. cyt.).

Bibliografia

Azzouni J., *The derivation-indicator view of mathematical practice*, „Philosophia Mathematica" 2004, 3 (12), s. 81–105.

Barwise J., *Mathematical proofs of computer system correctness*, „Notices of the American Mathematical Society" 1989, 36, s. 844–851.

Detlefsen M., *Formalism*, [w:] *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, (red.) S. Shapiro S., Oxford University Press, Oxford 2005, s. 236–317.

Gödel K., *Russell's Mathematical Logic*, [w:] *The philosophy of Bertrand Russell. Library of Living philosophers*, vol. 5, (red.) P.A. Schlipp, Open Court Publishing Company, La Salle, Ill. 1944, s. 123–153. Polskie tłumaczenie [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 77–102.

Hahn H., *Empiricism, Logic and Mathematics*, D. Reidel, Dordrecht – London – Boston 1980.

Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, 95, s. 161–190. Tłumaczenie polskie [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, (red.) R. Murawski, Wydawnictwa UAM, Poznań, s. 288–307.

Hilbert D., *Die Grundlagen der Mathematik*, „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität" 1928, 6, s. 65–85. Angielskie tłumaczenie [w:] *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, (red.) J. Van Heijenoort, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 2002, s. 464–479.

Kartezjusz, [1958] *Prawidła kierowania umysłem; poszukiwanie prawdy poprzez światło przyrodzone rozumu*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958.

Mancosu P., *Mathematical explanation: problems and prospects*, „Topoi" 2001, 20, s. 97–117.

Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig 1882.

Pringsheim A., *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, Zweiter Band, Erste Abteilung: Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, B.G. Teubner, Leipzig – Berlin 1925.

Rav Y., *Why do we prove theorems?*, „Philosophia Mathematica" 1999, 7, s. 5–41.

Rav Y., *A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices*, „Philosophia Mathematica" 2007, 15, s. 291–320.

Resnik M.D., Kushner D., *Explanation, independence and realism in mathematics*, *„British Journal for the Philosophy of Science" 1987,* 38 (2), s. 141–158.

Russell B.A.W., *Logical Atomism*, [w:] *Contemporary British Philosophy*, (red.) J. M. Muirhead, George Allen & Unwin, London 1924, s. 357–383. Przedrukowane [w:] *Logic and Knowledge*, (red.) R.C. Marsh, London, George Allen & Unwin, s. 323–343.

Russell B.A.W., *Essays in Analysis*, (red.) D. Lackey, George Allen & Unwin, London 1973.

Steiner M., *Mathematics, explanation and scientific knowledge*, „Nous" 1978, 12, s. 17–28.

Wójtowicz K., *O pojęciu dowodu w matematyce*, seria Monografie Fundacji Na Rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2012, s. 250.