Filozofia Nauki
Rok XV, 2007, Nr 2(58)

Piotr Błaszczyk

Eudoxos *versus* Dedekind[1]

0. W pracach z historii matematyki czy w książkach matematycznych w uwagach związanych z konstrukcją lub definicją ciała liczb rzeczywistych można znaleźć, że konstrukcję liczb rzeczywistych metodą przekrojów liczb wymiernych jako pierwszy zarysował, przeprowadził czy też odkrył grecki matematyk Eudoxos. Doskonałą ilustracją tej myśli są słowa Johna Conway'a z pierwszych kart jego *On Numbers and Games*:

> Dedekind (a przed nim autor piątej księgi [*Elementów* — P. B.] Euklidesa — uważa się, że był to Eudoxos) skonstruował liczby rzeczywiste z liczb wymiernych. Konstrukcja polegała na podziale liczb wymiernych na dwa takie zbiory L i R, że żaden element zbioru L nie jest większy od żadnego elementu zbioru R, i na ustaleniu, że gdy w klasach L i R nie ma elementów skrajnych, to za pomocą 'podziału' $\{L, R\}$ definiowana jest nowa liczba.[2]

I jeszcze jedna, podobna wypowiedź:

> Ważna możliwość zdefiniowania dowolnych liczb rzeczywistych przez liczby wymierne została odkryta przez greckiego matematyka Eudoksosa, który znalazł metodę wyznaczania, kiedy dwa różne stosunki wyrażające się liczbami rzeczywistymi są równe. […] W terminologii nowoczesnej ta definicja Eudoksosa opisuje liczbę rzeczywistą dodatnią $r = a/b$ za pomocą zbioru S wszystkich dodatnich stosunków wymiernych n/m, dla których $ma > nb$, następująco: r jest większe niż każdy stosunek n/m z S i jest najmniejszą liczbą rzeczywistą większą od wszystkich tych stosunków.[3]

---

[1] Artykuł jest oparty na VI rozdziale książki [Błaszczyk 2007].

[2] [Conway 2001], s. 3. Dedekinda konstrukcja liczb rzeczywistych jest opisana w: [Dedekind 1872]; zob. także [Fichtenholtz 1981], *Wstęp*, ss. 5-32.

[3] [Birkhoff, Mac Lane 1960], s. 99-100; a/b ma tu oznaczać stosunek $a : b$ odcinków a, b. (W miejsce $ma > nb$, w tekście stoi $ma < nb$, co jest oczywistą pomyłką.)

Przyjmujemy, że cytowani autorzy, jak i ci, których dalej przywołamy, respektują fakt, że Grecy nie mówili o liczbach rzeczywistych, ale o stosunkach wielkości geometrycznych; w rezultacie chodzi tu nie o identyczność, ale o związek teorii Eudoxosa z teorią liczb rzeczywistych. Ma on w szczególności polegać na tym, że każdemu stosunkowi można przyporządkować liczbę rzeczywistą; jednocześnie przyznaje się, że przyporządkowanie takie nie jest bijekcją;[4] czasami pokazuje się, że na gruncie teorii proporcji można zdefiniować mnożenie,[5] a nawet dodawanie stosunków,[6] co ma wzmocnić przekonanie o *podobieństwie* między dziedziną stosunków i dziedziną liczb rzeczywistych.

W artykule zajmujemy się tezą, że stosunkowi wielkości można przyporządkować liczbę rzeczywistą. Myśl tę na początku XX w. rozpropagował Thomas Heath, dlatego nazwaliśmy ją *tezą* Heath'a. W artykule sprecyzujemy *tezę* Heath'a, nadając jej ściśle matematyczny sens, a następnie, podając odpowiedni kontrprzykład, pokażemy, że jest ona błędna.

ELEMENTY

1. Powstanie *Elementów* określa się tak samo, jak okres życia Euklidesa: około roku 300 p.n.e. Oryginału nie odnaleziono. Tekst grecki ustalił i wydał w latach 1883-1888 Johan L. Heiberg.[7] Wydanie to na język angielski jako pierwszy przełożył Sir Thomas Heath. Tłumaczenie Heath'a ukazało się w roku 1908, wydanie drugie (zmienione i poprawione) — w roku 1926. W roku 1956 oficyna Dover Publications, na mocy porozumienia z dotychczasowym wydawcą (Cambridge University Press), wznowiła wydanie drugie; od tego czasu książka wydawana jest już w sposób ciągły, jako reprint i wręcz zalała cały świat.

Edycja Heath'a, obok samego tłumaczenia, zawiera mnóstwo objaśnień i komentarzy o charakterze filologicznym, historycznym i matematycznym.

EUKLIDES, *ELEMENTY*, KSIĘGA V

2. Księga V *Elementów* zawiera wykład teorii proporcji wielkości geometrycznych. Jej autorstwo przypisuje się Eudoxosowi z Knidos i dlatego jest ona nazywana teorią proporcji Eudoxosa. Księga składa się z osiemnastu definicji i dwudziestu pięciu twierdzeń. Dla celów artykułu istotne są definicje 4, 5 i 7.

Definicję V.4 (aksjomat Archimedesa) zapisujemy jak następuje:[8]

---

[4] Wyjątek stanowi [Stein 1990].

[5] Zob. [Baszmakowa 1975(b)], [Stein 1990].

[6] Zob. [Stein 1990].

[7] Zob. [Fowler 1999], rozdz. VI, [Heath 1956], t. I, *Wstęp*, ss. 1-151.

[8] Odniesienia do *Elementów* zaznaczamy, podając numer księgi (w notacji rzymskiej) oraz numer twierdzenia lub definicji (w notacji arabskiej).

$\forall A, B\, \exists n[nA > B]$,

gdzie $A, B \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$, $nA =_{df} \underbrace{A + ... + A}_{n-razy}$.

Dodawanie w strukturze $\mathfrak{M}$ jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek jest liniowy; o elementach A, B mówi się, że są wielkościami tego samego rodzaju.

Definicja V.5 to definicja proporcji:

$$A : B :: C : D \leftrightarrow_{df} \forall m, n[(nA >_1 mB \leftrightarrow nC >_2 mD) \wedge$$
$$\wedge (nA = mB \leftrightarrow nC = mD) \wedge (nA <_1 mB \leftrightarrow nC <_2 mD)],$$

gdzie $A, B \in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$, a $C, D \in \mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2)$.[9]

$A : B$ nazywane jest stosunkiem, $A : B :: C : D$ — proporcją.[10] Czasami miast o proporcji mówi się o równości stosunków $A : B = C : D$.

Definicja V.7 to definicja porządku stosunków:

$$A : B \succ C : D \leftrightarrow_{df} \exists m, n(nA >_1 mB \leftrightarrow nC \leqslant_2 mD).$$

2.1. Wielkości występujące w stosunku są tego samego rodzaju. Doskonale ilustruje to twierdzenie VI.1: „Trójkąty […] o tej samej wysokości mają się tak do siebie, jak ich podstawy”. W proporcji występują tu z jednej strony trójkąty (T_1, T_2), z drugiej — odcinki (b_1, b_2) i twierdzenie to można zapisać w postaci $T_1 : T_2 :: b_1 : b_2$.

Wielkości tego samego rodzaju to dla przykładu: (1) odcinki prostoliniowe, (2) kąty płaskie, (3) trójkąty, (4) prostokąty, (5) łuki ustalonego okręgu; odpowiednio wielkościami różnego rodzaju są: odcinek i kąt, kwadrat i odcinek, kwadrat i koło.

2.2. Teoria proporcji z Księgi V stanowi podstawę teorii figur podobnych rozwiniętej w Księdze VI. W geometrii teoria figur podobnych miast na teorii proporcji może być oparta na teorii liczb rzeczywistych w tym sensie, że jest rozwijana po wprowadzeniu metryki.[11] Stąd najpewniej pochodzi przekonanie o związku teorii proporcji z teorią liczb rzeczywistych. Dobrze oddają to słowa:

> to Grekom zawdzięczamy pierwszą, ścisłą i spójną teorię stosunków wielkości, czyli w istocie liczb rzeczywistych.[12]

2.3. W artykule zajmują nas komentarze historyków matematyki i matematyków związane z ustaleniem zależności między teorią proporcji Eudoxosa i teorią liczb rzeczywistych. Związek ten jest przedstawiany jedynie na gruncie definicji V.4 i V.5. Do założeń tych zaliczamy ponadto łączność i przemienność dodawania oraz liniowość porządku w strukturze $\mathfrak{M}$.

---

[9] Samej definicji V.5 poświęciliśmy odrębne opracowanie; zob. [Błaszczyk 2006].

[10] Oznaczania te wprowadzono w XVII w.; zob. [Grattan-Guiness 1996], s. 365-366.

[11] Zob. [Borsuk, Szmielew], rozdz. II. Jeszcze inaczej jest to przeprowadzone w [Hilbert 1930].

[12] [Bourbaki 1966], s. 406.

KOMENTARZ HEATH'A DO DEFINICJI V.5, ROK 1908

3. Definicję proporcji Heath opatrzył następującym komentarzem:

Jest oczywiste, że istnieje ścisła odpowiedniość, niemal zgodność, między Euklidesa definicją równych stosunków i współczesną teorią liczb niewymiernych pochodzącą od Dedekinda. Zakładając, że liczby naturalne są uporządkowane rosnąco, rozszerzając następnie dziedzinę liczb tak, by zawierała (1) zarówno liczby ujemne, jak i dodatnie, (2) ułamki *a*/*b*, gdzie *a*, *b* są liczbami naturalnymi, pod warunkiem, że *b* jest różne od zera, porządkując ułamki wraz z innymi liczbami na podstawie definicji:

$$\frac{a}{b} <=> \frac{c}{d} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } ad <=> cd,$$

Dedekind podaje następującą definicję liczby niewymiernej […].[13]

Na czym polega „zgodność definicji równych stosunków z teorią liczb niewymiernych"? Rozumowanie Heath'a jest następujące. Rozważmy dwa przypadki: (1) „niewymierny" i (2) „wymierny".

Ad (1). „Niech x/y i x'/y' będą równymi stosunkami w sensie Euklidesa. Wówczas $\frac{x}{y}$ podzieli wszystkie liczby wymierne na dwa zbiory A i B; $\frac{x'}{y'}$ podzieli wszystkie liczby wymierne na dwa zbiory A' i B'".[14]

$$\frac{x}{y} \mapsto (A, B), \text{ gdzie } A = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{a}{b} < \frac{x}{y}\}, \ B = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{a}{b} > \frac{x}{y}\},$$

i analogicznie w przypadku $\frac{x'}{y'} \mapsto (A', B')$.

Pary (A, B) i (A', B') są równe, mianowicie:

Niech $\frac{a}{b}$ będzie taką liczbą wymierną z A, że $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$. To znaczy, że $ay < bx$. Lecz wówczas, na podstawie definicji Euklidesa zachodzi także $ay' < bx'$. A stąd $\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'}$; dlatego każdy element A jest także elementem A'. […] Tak więc, innymi słowy, A i B są odpowiednio równe A' i B'; dlatego $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, zarówno według Dedekinda, jak i według Euklidesa.[15]

Równość $A = A'$ zachodzi na mocy implikacji:

$$(1) \qquad \frac{a}{b} < \frac{x}{y} \to ay < bx \leftrightarrow ay' < bx' \to \frac{a}{b} < \frac{x'}{y'},$$

$$(2) \qquad \frac{a}{b} < \frac{x'}{y'} \to ay' < bx' \leftrightarrow ay < bx \to \frac{a}{b} < \frac{x}{y}.$$

---

[13] [Heath 1956], t. II, s. 124-125. Komentarz ten znajduje się już w edycji z roku 1908.
[14] [Heath 1956], t. II, s. 125.
[15] [Heath 1956], t. II, s. 125.

Podobnie jest z równością $B = B'$, *ergo* $(A, B) = (A', B')$.

Ad (2). „Gdy x/y, x'/y' są wymierne, to jeden ze zbiorów, powiedzmy A, zawiera x/y, oraz jeden ze zbiorów, powiedzmy A', zawiera x'/y'. Wówczas $\frac{a}{b}$ może być równe $\frac{x}{y}$, tj. $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, co znaczy, że $ay = bx$. Dlatego, na podstawie definicji Euklidesa, $ay' = bx'$; czyli $\frac{a}{b} = \frac{x'}{y'}$. Tym sposobem zbiory znów są równe";[16]

(3) $$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \leftrightarrow ay = bx \leftrightarrow ay' = bx' \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x'}{y'}.$$

Ostatecznie, w przypadku „niewymiernym" i „wymiernym" zachodzi, że

> definicja Euklidesa wyznacza w zbiorze wszystkich liczb wymiernych równe przekroje i dlatego definiuje równe stosunki, w sposób, który dokładnie odpowiada teorii Dedekinda;[17]

$$(A, B) = (A', B') \leftrightarrow x : y = x' : y'.$$

3.1. Komentarz Heath'a odnosi się z jednej strony do *Elementów* Euklidesa, a z drugiej — do rozprawy Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872). W przejściach (1)-(3) równoważności

$$ay < bx \leftrightarrow ay' < bx',\ ay = bx \leftrightarrow ay' = bx'$$

oparte są na definicji V.5, natomiast implikacje i równoważności

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \to ay < bx, \quad ay < bx \to \frac{x}{y} < \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} < \frac{x'}{y'} \to ay' < bx', \quad ay' < bx' \to \frac{x'}{y'} < \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \leftrightarrow ay = bx, \quad ay' = bx' \leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x'}{y'},$$

to założenia pochodzące od Heath'a.

W związku z *Elementami* rozumowanie Heath'a oparte jest więc na dwóch założeniach:

(4) $$m : n = x : y \leftrightarrow my = nx,$$

(5) $$m : n < x : y \leftrightarrow my < nx,$$

[16] [Heath 1956], t. II, s. 125-126.
[17] [Heath 1956], t. II, s. 126.

gdzie w (4) stosunek $x : y$ jest „wymierny”, a w (5) — „niewymierny”. Dodajmy, że stosunek wielkości geometrycznych $x : y$ Heath oznacza za pomocą kreski ułamkowej $\frac{x}{y}$, natomiast ułamek $\frac{m}{n}$ przedstawiliśmy we wzorach (4), (5) jako stosunek liczb $m : n$. Wyjaśnimy to niżej w punkcie 5.

W odniesieniu do *Stetigkeit* rozumowanie Heath’a polega na przypisaniu Dedekindowi definicji:

(6) $$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq < np, \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq = np, \quad \frac{m}{n} > \frac{p}{q} \leftrightarrow_{df} mq > np,$$

oraz na pomyśle, aby z przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+, <)$ wiązać czy też utożsamiać liczbę rzeczywistą.

TEZA HEATH’A. I

4. Przyjmijmy równoważności (4) i (5), oraz przyjmijmy, że $x, y, x', y', \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$, zastępując znak proporcji znakiem równości. Definicja V.5 przyjmie postać

$$x : y = x' : y' \leftrightarrow_{df} \forall m, n$$

$$[(\frac{x}{y} > \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} > \frac{m}{n}) \wedge (\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} = \frac{m}{n}) \wedge (\frac{x}{y} < \frac{m}{n} \leftrightarrow \frac{x'}{y'} < \frac{m}{n})].$$

Równość stosunków można teraz interpretować jako równość zbiorów:

$$\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} < \frac{x}{y}\} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} < \frac{x'}{y'}\},$$

$$\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} = \frac{x}{y}\} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} = \frac{x'}{y'}\},$$

$$\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} > \frac{x}{y}\} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} > \frac{x'}{y'}\}.$$

Na tej podstawie stosunkowi $x : y$ odpowiada para zbiorów $(A_{x,y}, B_{x,y})$,

(H_1) $$x : y \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y}),$$

$$\text{gdzie} \qquad A_{x,y} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{m}{n} < \frac{x}{y}\}, \quad B_{x,y} = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ : \frac{p}{q} \geq \frac{x}{y}\},$$

lub, przyjmując w miejsce $\frac{m}{n}$ parę (m, n), a w miejsce $\frac{m}{n} < \frac{x}{y}$ i $\frac{p}{q} \geq \frac{x}{y}$, *via* równoważności (4) i (5), nierówności $my < nx$ oraz $py < qx$:

(7) $$A_{x,y} = \{(m,n) : my < nx\}, \quad B_{x,y} = \{(p,q) : py \geq qx\}.$$

Zakładając, że każda para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ jest przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_{+}, <)$, tj.:

(C) $$\forall x, y \in M \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}[((m,n) \in A_{x,y}, (p,q) \in B_{x,y}) \rightarrow mq < np],$$

dostajemy, że odwzorowanie (H_1) stosunkowi $x : y$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą.

Tezę, że każdej parze wielkości geometrycznych (x, y) można przyporządkować liczbę rzeczywistą $(A_{x,y}, B_{x,y})$ nazywam *tezą* Heath'a. Jest ona powtarzana, acz w różnych wariantach, przez cały wiek XX.[18] Heath bynajmniej nie ogłosił jej jako pierwszy,[19] ale ze względu na zasięg jego edycji *Elementów* znacząco przyczynił się do jej rozpowszechnienia.

W związku z *tezą* Heath'a dowodzi się też, że stosunkom „równym w sensie Euklidesa" odpowiadają równe liczby rzeczywiste, a „różnym" stosunkom — różne liczby rzeczywiste. Tymi aspektami nie będziemy zajmować się w niniejszym artykule.

4.1. *Teza* Heath'a związana jest z definicją zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$. Definicja ta może być uzasadniona albo na gruncie *Elementów*, i tak jest w komentarzu Heath'a, albo w oderwaniu od kontekstu historycznego, na gruncie czysto matematycznym, i tak jest w cytowanym na wstępie fragmencie z *Przeglądu algebry współczesnej*. Otóż formuły $my = nx$ i $my < nx$ mogą być traktowane albo jako formuły teorii proporcji, albo jako formuły teorii opisującej strukturę $\mathfrak{M}$. W związku z tym mówimy o *tezie* Heath'a w wersji historycznej lub matematycznej. Tę pierwszą zapisujemy jak następuje:

> każdemu stosunkowi wielkości geometrycznych x:y, *via* odwzorowanie (H_1), odpowiada liczba rzeczywista $(A_{x,y}, B_{x,y})$.

OCENA ZAŁOŻEŃ *TEZY* HEATH'A W WERSJI HISTORYCZNEJ

5. Rozumowanie Heath'a jest błędne zarówno w tej części, w której odnosi się do *Elementów*, jak i w tej, w której odnosi się do *Stetigkeit*. W związku z *Elementa-*

---

[18] Zob. [Baron 1969], s. 27, [Baszmakowa 1975(a)], s. 107, [Baszmakowa 1975(b)], s. 121, [Birkhoff, Mac Lane 1960], s. 99-100, [Boyer 1964], s. 55, [Claphan, Nicholson 2005], s. 157, [Conway 2001], s. 3, [Dummett 1991], s. 283, [Edwards 1979], s. 14, [Hartshorne 2000], s. 166-167, [Kordos 1994], s. 69, [Kostin 1954], s. 28, [Kulczycki 1973], s. 196, [Maizner 1995], s. 34, [Mioduszewski 1996], s. 69, [Maurin 1991], s. 316, [Nikolić 1974], s. 230, [Struik 1960], s. 31, [Weyl 1949], s. 39, [Więsław 1997], s. 38, [Wygodski 1956], s. 78-79.

[19] O związku definicji V.5 z teorią liczb rzeczywistych Dedekinda pisał już Otto Hölder w artykule *Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass* (1901). Podajemy za [Dummett 1991], ss. 281-283; zob. także [Fuchs 1963], s. 45-46.

mi jest ono oparte na równoważnościach (4) i (5). Nie są to ani twierdzenia, ani definicje Euklidesa, z kolei Heath ich też nie dowodzi. Pokażemy, że równoważności tych nie da się uzasadnić na gruncie *Elementów*.

5.1. W *Elementach* rozwinięte są dwie teorie proporcji: w Księdze V — teoria proporcji wielkości geometrycznych i w Księdze VII — teoria proporcji liczb. Ta druga oparta jest na definicji VII.20:

$$m : n :: k : l \leftrightarrow_{df} \exists p[pn = m, pl = k] \vee \exists p[pm = n, pk = l] \vee$$
$$\vee \exists u_1, u_2 \exists p, q[m = pu_1, n = qu_1, k = pu_2, l = qu_2],$$

gdzie wszystkie zmienne to liczby naturalne ≥ 1.[20] Dalej dowodzone jest twierdzenie VII.19:

$$m : n :: p : q \leftrightarrow mq = np,$$

znane dzisiaj jako definicja liczby wymiernej: $(m, n) \equiv (p, q) \leftrightarrow_{df} mq = np$.

5.2. W związku z *tezą* Heath'a Księga VII jest interpretowana jako teoria liczb wymiernych: proporcja to równość stosunków, stosunek liczb to ułamek i w rezultacie proporcja $m : n :: p : q$ to równość ułamków $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Trzymając się jednak faktów, możemy powiedzieć co następuje: (1) Ani w Księdze VII, ani w Księdze V w ogóle nie jest zdefiniowane pojęcie stosunku.[21] (2) Nawet gdy przyjąć, że stosunek liczb jest ułamkiem, a proporcja równością, to i tak nigdzie w *Elementach* „ułamki" te nie są ani dodawane, ani mnożone, co więcej, w dobie Euklidesa operacje takie nie były nawet znane. Tej jednej kwestii David Fowler poświęcił odrębny rozdział swej książki *The Mathematics of Plato's Academy*. Czytamy tam:

> W rozdziale tym pokażę, że w greckich tekstach matematycznych, naukowych, finansowych, pedagogicznych pochodzących z okresu przed Heronem i Diofantesem nie znajdujemy ani pojęcia ułamka zwykłego p/q, ani operacji na ułamkach takich jak np. $p/q \times r/s = pr/qs$, czy $p/q + r/s = (ps + qr)/ps$.[22]

(3) Dodajmy do tego, że nigdzie w *Elementach* owe „ułamki" nie są porównywane w sensie relacji mniejszy-większy, oraz jeszcze i to (4), że jako pierwszy definicję $p/q < r/s \leftrightarrow_{df} ps < qr$ podał Heinrich Weber w roku 1895.[23]

W rezultacie, nawet gdy przyjąć, że stosunek $m : n$ jest ułamkiem $\frac{m}{n}$, to różnica między dzisiejszym rozumieniem liczb wymiernych a tym, co można znaleźć w *Elementach* jest taka, jak różnica między ciałem uporządkowanym $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$

[20] W *Elementach* liczba to *dzisiejsza* liczba naturalna > 1.

[21] Literalnie V, def. 3. jest definicją stosunku, ale jak dotąd nikt nie potrafił nadać matematycznego sensu temu zdaniu.

[22] [Fowler 1999], s. 227.

[23] Zob. niżej pkt 8.

a zbiorem $\mathbb{Q}$. W żadnym więc razie nie można przyjąć, że w *Elementach* występują przekroje zbioru ($\mathbb{Q}$, <).

5.3. Teorie proporcji z Księgi V i VII *spotykają* się w Księdze X, w twierdzeniach X.5 i X.6:

> Wielkości współmierne są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby;
>
> Gdy dwie wielkości są do siebie w takim stosunku, jak liczba do liczby, to wielkości te są współmierne.

Można je zapisać razem w postaci:

(8) $\quad$ x : y :: m : n $\leftrightarrow$ wielkości x, y są współmierne.[24]

W twierdzeniu X.5 stosunki liczb są porównywane ze stosunkami wielkości współmiernych. Pojęcie to jest wprowadzone definicją X.1:

> Współmiernymi nazywane są te wielkości, które są mierzone tą samą miarą;

$$\exists C \in \mathfrak{M} \exists p, q[x = pC, y = qC], \qquad \text{gdzie } x, y \in \mathfrak{M}.$$

Druga część definicji X.1 to definicja wielkości niewspółmiernych:

> […] a niewspółmiernymi te, które nie mogą mieć żadnej wspólnej miary.

5.4. Równoważność (4) ma odpowiadać przypadkowi, gdzie „*x*/*y*, *x*′/*y*′ happen to be *rational*", ale nie chodzi tu o wymierność w rozumieniu Euklidesa. Pojęcie „odcinek wymierny" (*rational straight line*) wprowadza Euklides definicją X.3:

> […] jest wykazane, że istnieje nieskończenie wiele linii prostych, które są współmierne i odpowiednio niewspółmierne z pewną ustaloną linią, jedne tylko ze względu na długość, inne także ze względu na kwadrat. Tę ustaloną linię nazwijmy wymierną, a linie proste, które są z nią współmierne, czy to ze względu na długość, czy tylko na kwadrat, wymiernymi, te zaś, które są z nią niewspółmierne — niewymiernymi.

Pojęcie odcinka wymiernego wiąże się z wyróżnieniem pewnego odcinka a, w stosunku do którego dany odcinek b może być wymierny ze względu na długość (*rational in length*), tj. a i b są współmierne w myśl definicji X.1, lub wymierny ze względu na kwadrat (*rational in square*), tj. kwadraty zbudowane na odcinkach a i b są współmierne w myśl definicji X.1.[25]

Tak więc przypadek, w którym stosunki $x : y$ i $x' : y'$ są wymierne, należy rozumieć tak, że x, y i x', y' są parami wielkości współmiernych.

5.5. Aby na podstawie (8) udowodnić (4) należałoby pokazać, że zachodzi:

$$\text{wielkości } x, y \text{ są współmierne} \leftrightarrow nx = my.$$

---

[24] W *Elementach* nie jest powiedziane, na gruncie której definicji — V.5 czy VII.20 — ustalana jest ta proporcja.

[25] Zob. [Euklides], X, def. 2.

Gdy x, y są współmierne, to dla pewnego C oraz pewnych p, q zachodzi $x = pC$, $y = qC$, a wtedy $qx = py$. Ale jak na gruncie *Elementów* wykazać

(9) $$qx = py \rightarrow \exists C \exists m, n[x = mC, y = nC]?$$

Implikację (9) można uzasadnić, gdy x i y są odcinkami: *via* twierdzenia VI.2, VI.9, przyjmując $C = \frac{x}{p}$ dostajemy $x = pC$, $y = qC$.[26] Ale nawet wtedy równoważność (4) byłaby twierdzeniem, które można udowodnić na gruncie teorii proporcji oraz aksjomatów geometrii. Jest bowiem tak, że w dowodach twierdzeń VI.2, VI.9 Euklides wykorzystuje postulat o prostych równoległych.

Reasumując: równoważność (4) można uzasadnić na gruncie *Elementów*, ale tylko w przypadku odcinków, nie zaś dowolnych wielkości geometrycznych, oraz na podstawie innych założeń niż tylko aksjomat Archimedesa.

6. Przejdźmy do zidentyfikowania nierówności występujących w wyrażeniu (5)

$$\frac{m}{n} < \frac{x}{y} \leftrightarrow my < nx.$$

Z prawej strony jest to nierówność wielkości: $my <_1 nx$, gdzie x, y $\in \mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$, z lewej — nierówność stosunków w myśl definicji V.7:

(10) $$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y}.$$

Nierówność (10) jest bezpodstawna, bo w *Elementach* stosunki wielkości nie są porównywane ze stosunkami liczb w sensie relacji $\prec$. Po drugie, nawet gdy przyjąć, że $x : y$ jest porównywane z $m : n$ na podstawie definicji V.7, to w miejsce:

$$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y} \leftrightarrow my <_1 nx$$

powinno być:

$$\frac{m}{n} \prec \frac{x}{y} \leftrightarrow \exists p, q[qx >_1 py, np \geq mq],$$

gdzie x, y $\in \mathfrak{M}_1$, m, n $\in \mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, <)$. Po trzecie, w Księdze V przyjęte są (*implicite*) dwa założenia o strukturze $\mathfrak{M}$, które nie odnoszą się do struktury $\mathfrak{N}$. Pierwsze znajdujemy w dowodzie twierdzenia V.5, mianowicie:

$$\forall A \forall n \exists B[nB = A], \text{ gdzie } A, B \in \mathfrak{M};$$

drugie to założenie o istnieniu czwartej proporcjonalnej:

$$\forall A, B, C \exists X[A : B :: C : X], \text{ gdzie } A, B, C, X \in \mathfrak{M}.$$[27]

[26] VI.2 to twierdzenie Talesa; VI.9 zawiera konstrukcję podziału odcinka na *n* części.

[27] Zob. [Euklides], V, tw. 18.

Euklides wprost pyta o istnienie czwartej proporcjonalnej w odniesieniu do struktury $\mathfrak{N}$, a odpowiedź, jaką daje, jest negatywna: nie dla każdej trójki n, m, p istnieje takie q, że $n : m :: p : q$ w sensie definicji VII.20.[28]

Reasumując: w *Elementach* nie ma podstaw do uzasadnienia równoważności (5).

RICHARD DEDEKIND, *STETIGKEIT UND IRRATIONALE ZAHLEN*, ROK 1872

7. Przechodzimy do tej części komentarza Heath'a, która związana jest z rozprawą *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Przede wszystkim w rozprawie tej nie ma definicji (6). Liczbom wymiernym wprost poświęcony jest §1. rozprawy. Ich własności podzielone są na dwie grupy: związane z działaniami i związane z porządkiem. O działaniach Dedekind pisze niewiele, ale za warte wyszczególnienia uznał ich wewnętrzność (w dzisiejszym rozumieniu); istotnie, w owym czasie była to zupełnie nowa idea. Z §6. można natomiast wnosić, że działania te są przemienne oraz że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

O porządku liczb wymiernych („*systemu R*") czytamy:

> […] system *R* jest dziedziną jednowymiarową dobrze uporządkowaną [porządek jest liniowy — P. B.], nieskończoną w dwu przeciwnych kierunkach.[29]

Dalej, *explicite* i we współczesnej formie podane są własności: przechodniość oraz gęstość; spójność porządku jest wyrażona poprzez pojęcia przekroju, w *quasi* definicji porządku zawarta jest zaś zgodność porządku z dodawaniem.[30]

W §4. *implicite* przyjmuje Dedekind kolejne własności: aksjomat Archimedesa oraz zgodność porządku z mnożeniem.

Ostatecznie, przyjmując to, co w *Stetigkeit* jest powiedziane wprost oraz *implicite*, liczby wymierne to ciało archimedesowe, uporządkowane w sposób gęsty, w którym liczby całkowite dodatnie spełniają aksjomat indukcji.[31]

Reasumując: ani w *Elementach*, ani w *Stetigkeit* nie ma uporządkowanego zbioru liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+, <)$, gdzie $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$, a porządek oraz równość dane są definicjami (6). Skąd zatem pochodzi dzisiejsze pojęcie liczby wymiernej?

---

[28] Zob. [Euklides], IX, tw. 19.

[29] [Dedekind 1872], s. 138.

[30] Zob. „Różność dwóch liczb wymiernych objawia się w tym, że różnica $a - b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną" [Dedekind 1872], s. 138; symbolicznie $a > b \leftrightarrow a - b > 0$, co jest równoważne warunkowi: $a > b \to a + c > b + c$.

[31] Aksjomaty ciała uporządkowanego po raz pierwszy zostały sformułowane w [Hilbert 1900].

HEINRICH WEBER, *LEHRBUCH DER ALGEBRA*, ROK 1895

8. We *Wprowadzeniu* do *Lehrbuch der Algebra*, nawiązując do Księgi V *Elementów* oraz *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Heinrich Weber podaje zupełnie oryginalną konstrukcję ciała liczb rzeczywistych opartą na definicji stosunku. To właśnie z tej pracy pochodzą definicje (6); tam też znajdujemy równoważności (4) i (5), stanowiące podstawę rozumowania Heath'a. Niżej przedstawimy teorię proporcji rozwiniętą przez Webera.

8.1. „Zbiór mierzalny" to struktura $\mathfrak{W} = (W, +, <)$, gdzie dodawanie jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek jest liniowy, a związek między dodawaniem i porządkiem określają aksjomaty:

(W1) $\exists n[na > b]$,

(W2) $a > c \rightarrow \exists b \in W[b + c = a]$,

(W3) $a + b > a$, gdzie $na =_{df} \underbrace{a + ... + a}_{n-razy}$.

„Zbiór mierzalny gęsty" to struktura $\mathfrak{W}$, w której porządek jest gęsty.

> Zbiór gęsty można utworzyć w ten sposób, że pary liczb naturalnych uznajemy za elementy nowego zbioru. Pary te będziemy nazywać ułamkami i będziemy je oznaczać jako $m : n$ lub $\frac{m}{n}$. Przyjmujemy, że dwa ułamki $m : n$ i $m' : n'$ są równe wtedy, gdy $m \cdot n' = n \cdot m'$. Gdy przyjmiemy, że wszystkie równe ułamki stanowią element i gdy przyjmiemy ponadto, że $m : n$ jest większe od $m' ; n'$, wtedy gdy $m \cdot n' > n \cdot m'$, to otrzymamy zbiór uporządkowany. Łatwo pokazać, że tak otrzymany zbiór jest uporządkowany w sposób gęsty;[32]

(11) $m : n \equiv p : q \leftrightarrow_{df} m \cdot q = n \cdot p$,

(12) $m : n \succ m' : n' \leftrightarrow_{df} mn' > nm'$.

„Zbiór mierzalny ciągły" to struktura $\mathfrak{W}$, w której porządek < jest gęsty i ciągły w sensie Dedekinda.

> Przykładem zbioru gęstego są ułamki wymierne. Zbiór ten będziemy oznaczać przez *R*. Nie jest on ciągły, lecz zbiór *R* można wykorzystać do zbudowania zbioru ciągłego. Zbiór wszystkich przekrojów zbioru *R* oczywiście też jest zbiorem, oznaczmy go przez *S*.[33]

Dodawanie i porządek w *S* definiowane są tak, jak dodawanie i porządek przekrojów zbioru $(\mathbb{Q}, <)$ w konstrukcji Dedekinda; można pokazać, że $(S, +, <)$ jest „zbiorem mierzalnym ciągłym".

---

[32] [Weber 1895], s. 4-5.
[33] [Weber 1895], s. 6.

8.2. Niech $\mathfrak{W}_1 = (W_1, +, <_1)$ będzie „zbiorem mierzalnym”, niech a, $b \in \mathfrak{W}_1$, niech (m, n) będzie parą liczb naturalnych. Gdy $na = mb$, to stosunek $a : b$ *ex definitione* jest równy ułamkowi $m : n$;

(13) $$a : b = m : n \leftrightarrow_{df} na = mb.$$

Podawszy tę definicję, Weber pisze:

> Wszystkie równe stosunki wymierne tworzą liczbę wymierną. Liczby wymierne, podobnie jak ułamki, tworzą zbiór gęsty mierzalny. Do liczb wymiernych należą też liczby naturalne, przy założeniu, że przez liczbę naturalną m będziemy rozumieli stosunek $m : 1$.[34]

Gdy $na \neq mb$, to stosunek $a : b$ jest większy (mniejszy) od $m : n$;

(14) $$a : b \succ m : n \leftrightarrow_{df} na >_1 mb, \;\; a : b \prec m : n \leftrightarrow_{df} na <_1 mb.$$

Następnie Weber definiuje porządek oraz równość stosunków:

(15) $$a : b \succ c : d \leftrightarrow_{df} \exists m, n[na >_1 mb, md >_2 nc],$$

(16) $$a : b = c : d \leftrightarrow_{df} \neg(a : b \succ c : d) \wedge \neg(a : b \prec c : d),$$

gdzie a, $b \in \mathfrak{W}_1 = (\mathrm{W}_1, +, <_1)$, c, $d \in \mathfrak{W}_2 = (\mathrm{W}_2, +, <_2)$. Stąd, na podstawie (13) i (16), otrzymujemy:

$$a : b = c : d \leftrightarrow_{df} \forall m, n$$
$$[(na <_1 mb, nc <_2 md) \vee (na = mb, nc = md) \vee (na >_1 mb, nc >_2 md)],$$

to zaś jest równoważne definicji V.5.

Pominiemy konstrukcję ciała liczb rzeczywistych,[35] istotne jest to, że w teorii Webera równoważności (4) i (5) nie są twierdzeniami, ale definicjami, chodzi mianowicie o definicje (13) i (14).

8.3. W teorii Webera można udowodnić *tezę* Heath’a. Niech mianowicie a, $b \in \mathfrak{W}_1$. Przyjmując

$$A_{a,b} = \{(m,n) : m : n \prec a : b\}, \;\; B_{a,b} = \{(p,q) : p : q = a : b \vee p : q \succ a : b\},$$

zachodzi:

(C) $$\forall a, b \in M \forall m, n, p, q[((m,n) \in A_{a,b}, (p,q) \in B_{a,b}) \rightarrow mq < np]$$

Można pokazać, że aksjomaty Webera (W1)+(W2)+(W3) są równoważne aksjomatom (W1)+(W2)+(W4), gdzie (W4) to aksjomat: $a > c \rightarrow a + b > c + b$, a zatem

---

[34] [Weber 1895], s. 13.

[35] To Weber, a nie Peano czy Russell — jak się często podaje — jako pierwszy utożsamił liczbę rzeczywistą z przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}, <)$.

$$(mb <_1 na, qa \leq_1 pb) \rightarrow (mqb <_1 nqa, nqa \leq_1 npb).$$

Z przechodniości porządku dostajemy, że $mqb <_1 npb$, a stąd, na mocy (W1), (W4) oraz spójności, że $mq < np$.[36]

8.4. U Webera liczba wymierna jest *zbiorem* wszystkich „stosunków” równych danemu ułamkowi $m : n$. Dla skonstruowania ciała liczb rzeczywistych wystarczy jednak przyjąć, że liczba ta jest zbiorem wszystkich ułamków, a nie „stosunków”, równych $m : n$. I tak właśnie postępuje Edmund Landau w pracy *Grundlagen der Analysis*, i to właśnie od niego pochodzi współczesna definicja liczby wymiernej wyrażona już w języku teorii relacji, a nie teorii proporcji.[37]

TEZA HEATH'A. II

9. Definicja zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ może być uzasadniona inaczej niż w rozumowaniu Heath'a. Niech $x, y, x, y \in \mathfrak{M} = (M, +, <)$. Przyjmijmy na mocy definicji:

(17) $$A_{x,y} = \{(m,n) : my < nx\}, B_{x,y} = \{(p,q) : py \geq qx\}.$$

W rozumowaniu Heath'a formuły $my < nx$, $my = nx$, *via* równoważności (4) i (5), mają należeć do teorii proporcji i właśnie to zostało zakwestionowane przez nas w punkcie 6. W definicji (17), w odróżnieniu od (7), formuły te należą do teorii opisującej strukturę $\mathfrak{M}$. W miejsce tajemniczego $x : y$ przyjmuje się teraz parę uporządkowaną (x, y), w miejsce $m : n$ — parę (m, n). Aksjomat Archimedesa jest przyjmowany teraz nie dlatego, że tak jest w *Elementach*, ale po to, aby wykluczyć ewentualność, że któryś ze zbiorów $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ jest pusty. Pozostaje tylko pytanie: jaki jest związek definicji (17) z teorią proporcji Eudoxosa?

Otóż zapiszmy definicję V.5 podobnie jak w punkcie 4.:

$$(x,y) = (x',y') \leftrightarrow_{df} \forall m,n$$
$$[(nx > my \leftrightarrow nx' > my') \wedge (nx = my \leftrightarrow nx' = my') \wedge (nx < my \leftrightarrow nx' < my')].$$

Równość $(x, y) = (x', y')$ można teraz interpretować jako równości zbiorów:

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my < nx\} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my' < nx'\},$$
$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my = nx\} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my' = nx'\},$$
$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my > nx\} = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : my' > nx'\}.$$

Parze (x, y) przyporządkujmy parę $(A_{x,y}, B_{x,y})$,

---

[36] Zachodzi: $2b > b$ oraz $m \geq n \rightarrow mb \geq nb$. Por. [Mioduszewski 1996], s. 63.

[37] Zob. [Landau 1930].

(H_2) $\qquad \dfrac{x}{y} \mapsto (A_{x,y}, B_{x,y})$

Zakładając, że para $(A_{x,y}, B_{x,y})$ jest przekrojem osi liczb wymiernych $(\mathbb{Q}_+, <)$, tj.:

(C) $\qquad \forall x, y \in M \forall m, n, p, q \in N[((m,n) \in A_{x,y}, (p,q) \in B_{x,y}) \to mq < np]$,

dostajemy *tezę* Heath'a w wersji matematycznej:

> każdej parze elementów (x, y) struktury $\mathfrak{M}$, *via* odwzorowanie (H_2), odpowiada liczba rzeczywista $(A_{x,y}, B_{x,y})$.

KONTRPRZYKŁAD

10. *Teza* Heath'a jest zazwyczaj jedynie formułowana, ale czasami jest też dowodzona; dowody zwykle są tylko szkicowane, ale zdarzają się też i szczegółowe uzasadnienia.[38] Milczącym założeniem *tezy* Heath'a w obydwu wersjach — historycznej i matematycznej — jest domniemanie, iż para zbiorów $(A_{x,y}, B_{x,y})$ zdefiniowanych równaniami (7) lub (17) jest istotnie przekrojem zbioru $(\mathbb{Q}_+, <)$ tj., że zachodzi warunek (C), powtórzmy go:

(C) $\qquad \forall x, y \in M \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}[((m,n) \in A_{x,y}, (p,q) \in B_{x,y}) \to mq < np]$,

lub inaczej

$$\forall x, y \in M \forall m, n, p, q \in \mathbb{N}[(my < nx, qx < py) \to mq < np].$$

Wskażemy teraz strukturę $\mathfrak{M} = (M, +, <)$, w której dodawanie jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek jest liniowy, w której spełniony jest aksjomat Archimedesa i nie zachodzi warunek (C), tj.:

$(\neg\mathrm{C})$ $\qquad (\exists x, y \in M \exists m, n, p, q \in \mathbb{N}[(my < nx \wedge qx < py \wedge mq \geq np]$.

10.1. Niech ξ będzie liczbą niewymierną z przedziału $[0,1]$, $\xi \in IQ \cap [0,1]$. Definiujemy ciąg $\{\xi_n\}$ jak następuje: $\xi_n = n\xi - E(n\xi)$, gdzie $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby x. Niech I będzie przedziałem zawartym w $[0,1]$, niech $|I|$ oznacza długość przedziału I, $n(I)$ zaś — moc zbioru $\{i \leq n : \xi_i \in I\}$. Pokazuje się, że zachodzi:

Twierdzenie (o ekwipartycji). Dla dowolnego przedziału $I \subset [0,1]$ jest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(I)}{n} = |I|.$$ [39]

---

[38] Zob. [Nikolić 1974], [Mioduszewski 1996], ss. 63-69.

[39] Zob. [Niven 1956], ss. 71-75; zob. także [Narkiewicz 1977], rozdz. VIII.

Dla naszych celów wystarczy skromny wniosek z tego twierdzenia: dla dowolnego przedziału $I \subset [0,1]$ istnieje takie n, że $\xi_n \in I$.

Oczywiście jest $\xi_n \in IQ \cap [0,1]$. Przyjmując w twierdzeniu o ekwipartycji za liczbę ξ liczbę ξ_n dostajemy, że dla dowolnego przedziału $I \subset [0,1]$ istnieje takie m, że

$$m\xi_n - E(m\xi_n) = (\xi_n)_m = \xi_{nm} \in I \ .$$

10.2. Przyjmujemy $\mathfrak{M}_\xi = (M_\xi, +, <)$, gdzie $M_\xi = \{\xi_n\}$. Elementy zbioru M_ξ dodajemy *mod* 1, a porządek pokrywa się z porządkiem osi liczb rzeczywistych.

Przyjmijmy $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Niech $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$. Oczywiście $x, y \in M_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Można sprawdzić, że zachodzi

$$3y < 5x \wedge 3x < y \wedge 3 \cdot 3 > 5 \cdot 1 \ ,$$

co daje zaprzeczenie warunku (C).

Fakt, że w $\mathfrak{M}_\xi$ spełniony jest aksjomat Archimedesa, otrzymujemy jak następuje: gdy dla pewnych n, m jest $\xi_n < \xi_m$, to dla pewnego k, na podstawie twierdzenia o ekwipartycji, jest $k\xi_n = \xi_{kn} \in (\xi_m, 1)$, co oznacza, że $k\xi_n > \xi_m$.

10.3. W tezie Heath'a jedynym założeniem dotyczącym struktury $\mathfrak{M}$ jest aksjomat Archimedesa. Nie wynika z niego zgodność porządku z dodawaniem. Można pokazać, że właśnie w strukturze $\mathfrak{M}_\xi$ porządek nie jest zgodny z dodawaniem i na tym w zasadzie polega istota przedstawionego kontrprzykładu.

ELEMENTY, KSIĘGA V

11. Spójrzmy teraz na teorię Eudoxosa jako na system dedukcyjny. Niech dana będzie struktura $\mathfrak{M} = (M, +, <)$. Biorąc pod uwagę to, co w Księdze V powiedziane wprost lub *implicite*, dostajemy, że (1) dodawanie jest działaniem wewnętrznym,[40] (2) łącznym i przemiennym[41], (3) porządek jest liniowy,[42] a związek dodawania z porządkiem zadany jest aksjomatami:

(E1) $\exists n \in N[nA > B]$,

(E2) $A > C \rightarrow \exists E \in M[C + E = A]$,[43]

(E3) $A > C \rightarrow A + B > C + B$.[44]

W punkcie 6. wskazaliśmy dwa kolejne założenia:

[40] Zob. [Euklides], V, *passim*.
[41] Zob. [Euklides], V.1.
[42] Przechodniość — V. 8, spójność — V.9, V.10, V.18.
[43] Zob. V.8. Aksjomat ten podają także [Bourbaki 1966] i [Maizner 1995].
[44] Zob. [Euklides], V.12, V.25. Aksjomat ten nie został jak dotąd zauważony.

(E4) $\forall A \forall n \exists B [nB = A]$,

(E5) $\forall A, B, C \exists X [A : B :: C : X]$.

11.1. W komentarzach aksjomat (E5), *via Kategorie* Arystotelesa, próbuje się skojarzyć z ciągłością porządku w strukturze $\mathfrak{M}$.[45] Wystarczy jednak wziąć strukturę $(\mathbb{Q}_+, +, <)$, by zobaczyć, że z (E1)-(E5) nie wynika ciągłość porządku w $\mathfrak{M}$. Z drugiej strony, przyjmując, że w $\mathfrak{M}$ spełnione są warunki (1)-(3) można pokazać, że aksjomaty (E1)-(E3) są równoważne aksjomatom (W1)-(W3), a w teorii Webera zachodzi twierdzenie: gdy porządek < jest ciągły (w sensie Dedekinda), to zachodzi (E5).[46] W dowodzie tym istotna jest jednak liniowość porządku stosunków, a nie od razu widać, czy analogiczną własność można uzyskać w teorii Eudoxosa.[47]

11.2. Aksjomaty (E1)-(E3) są — jak powiedziano — równoważne (W1)-(W3). Zważywszy, że w teorii Webera zachodzi *teza* Heath'a można spytać, czy *tezę* Heath'a w wersji matematycznej można udowodnić na gruncie (E1)-(E3)?

Pierwsza trudność polega na tym, że w teorii Webera *teza* Heath'a wynika z liniowości porządku stosunków, natomiast liniowość porządku zadanego definicją V.7 nie jest bynajmniej oczywista. Druga trudność jest natury filozoficznej, chodzi mianowicie o uzasadnienie związku między *tezą* Heath'a a teorią Eudoxosa. Na jeden aspekt tego zagadnienia wskazaliśmy już w punkcie 9. — to interpretacja definicji V.5. Teraz omówimy drugi aspekt.

W matematycznej wersji *tezy* Heath'a parze (x,y) przyporządkowywana jest liczba rzeczywista. Ujmując teorię Eudoxosa jako teorię aksjomatyczną — czy to w wersji (E1)-(E3), czy (E1)-(E5) — zwrot „wielkość geometryczna" oznacza tyle, co element struktury $\mathfrak{M}$. W *Elementach* wielkości geometryczne to obiekty geometryczne ustalonego rodzaju, w szczególności odcinki i kąty środkowe danego okręgu.[48] Euklides nie definiuje ani dodawania odcinków, ani dodawania kątów. Łatwo jest zdefiniować dodawanie i porządek odcinków tak, aby był spełniony aksjomat (E3), ale jak to zrobić w przypadku kątów? Czy można zdefiniować dodawanie kątów tak, aby były spełnione założenia Księgi V?

Nie potrafimy wprost odpowiedzieć na to pytanie, możemy natomiast pokazać, jak rzecz jest rozwiązana w dzisiejszej matematyce. Wiąże się to z trzema interpretacjami pojęcia „kąt".

(1) W geometrii elementarnej, gdzie kąt jest obiektem geometrycznym, dodawanie kątów (swobodnych) jest zdefiniowane tylko w ograniczonym zakresie, mówiąc nieprecyzyjnie: dla pary (α, β) suma $\alpha + \beta$ jest określona tylko wtedy, gdy nie prze-

---

[45] Zob. [Stein 1990].

[46] Zob. [Weber 1895], s. 15.

[47] Gdy w strukturze $\mathfrak{M}$ spełnione są jedynie dwa warunki (E1) i (E3), to porządek stosunków nie musi być spójny.

[48] Zob. [Euklides], VI. 33.

kracza kąta półpełnego.[49] Tak zdefiniowane dodawanie jest zgodne z *naturalnym*, danym na mocy definicji, porządkiem kątów.[50]

(2) Zgodność porządku z dodawaniem jest istotna w dowodzie twierdzenia o istnieniu miary kątów; to samo w przypadku miary odcinków.[51] Z tym zaś wiąże się druga interpretacja, a dokładniej *zniesienie* pojęcia kąta. Otóż w teorii przestrzeni euklidesowych nie jest definiowany kąt, a jedynie miara kąta, dokładniej: kąt (między wektorami) to *ex definitione* pewna liczba rzeczywista.[52] Podobnie jest w trygonometrii, gdzie porównywane są nie kąty i odcinki rozumiane jako obiekty geometryczne, ale miary kątów i długości odcinków, a więc pewne liczby rzeczywiste.

(3) Trzecią interpretację znajdujemy w analizie zespolonej: liczby zespolone o module 1 mogą być rozumiane jako kąty, wówczas mnożenie liczb zespolonych interpretujemy jako dodawanie kątów. W tym przypadku można przywołać twierdzenie: nie istnieje porządek w zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$, który byłby zgodny z działaniami w ciele liczb zespolonych $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0,1)$.[53] Właśnie do tej interpretacji pojęcia „kąt" nawiązuje kontrprzykład podany w punkcie 10.

BIBLIOGRAFIA

Baron Margaret (1969), *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, Oxford 1969.

Baszmakowa G. M. (1975(a)), *Grecja starożytna*, [w:] *Historia matematyki*, t. I, A. P. Juszkiewicz (red.), tł. St. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975, ss. 64-115.

Baszmakowa G. M. (1975(b)), *Kraje hellenistyczne i imperium rzymskie*, [w:] *Historia matematyki*, t. I, A. P. Juszkiewicz (red.), tł. St. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1975, ss. 116-167.

Błaszczyk Piotr (2006), *O definicji 5 z Księgi V Elementów Euklidesa*, Investigationes Linguisticae, t. XIV, 2006, http://www.inveling.amu.edu.pl, ss. 120-146.

Błaszczyk Piotr (2007), *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen",* Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków 2007.

Birkhoff Garrett, Mac Lane Saunders (1960), *Przegląd algebry współczesnej*, tł. A. Ehrenfeutcht, A.W. Mostowski, PWN, Warszawa 1960.

Borsuk Karol, Szmielew Wanda (1972), *Podstawy geometrii*, PWN, Warszawa 1972.

Bourbaki Nicolas (1966), *Historical Note*, [w:] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics. General Topology. Part 1.*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachussetts 1966, ss. 406-416.

Boyer Carl B. (1964), *Historia rachunku różniczkowego i rozwój jego pojęć*, tł. S. Dobrzycki, PWN, Warszawa 1964.

Claphan Christopfer, Nicholson James (2005), *Eudoxus of Cnidus*, [w:] *The Concise Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2005, s. 157.

[49] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], §53.

[50] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], s. 112.

[51] Zob. [Borsuk, Szmielew 1972], §§78,79.

[52] Zob. [Sieklucki 1978], s. 64.

[53] Wynika to stąd, że w dowolnym ciele uporządkowanym $(F, +, \cdot, 0,1, <)$ zachodzi: $-1 < 0$ oraz $a \neq 0 \rightarrow a^2 > 0$.

Conway John (2001), *On Numbers and Games*, AK Peters, Natick, Massachusetts 2001.

Dedekind Richard (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872; cytowane za: R. Dedekind, *Ciągłość i liczby niewymierne*, tł. R. Murawski, [w:] *Filozofia matematyki*, opr. R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1994, ss. 136-149.

Dummett Michael (1991), *Frege. Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts 1991.

Edwards Charles H. (1979), *Historical Development of the Calculus*, Springer, New York 1979.

Euklides, *Elementy*, [w:] [Heath 1956].

Fichtenholtz G. M (1981), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, PWN, 1981.

Fowler David (1999), *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, wyd. drugie, Clarendon Press, Oxford 1999.

Fuchs L. (1963), *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford 1963.

Grattan-Guiness Ivor (1996), *Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them*, Historia Mathematica 23, 1996, ss. 355-375.

Hartshorne Robin (2000), *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

Heath Thomas L. (1956), *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*, t. I-III (reprint wydania z roku 1926), Dover, New York 1956; wydanie pierwsze: Cambridge University Press, Cambridge 1908; wydanie drugie („poprawione i rozszerzone"): Cambridge 1926.

Hilbert David (1900), *Über den Zahlbegriff*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinignung 8, 1900, ss. 180-184.

Hilbert David (1930), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig 1930.

Joyce David E. (1997), *Euclid's Elements*, http://aleph0.clarku.edu/djoyce/ java/elements/elements.html

Kordos Marek (1994), *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

Kostin W. (1954), *Podstawy geometrii*, tł. J. Turkowska, PZWS, Warszawa 1952.

Kulczycki Stefan (1973), *Z dziejów matematyki greckiej*, PWN, Warszawa 1973.

Landau Edmund (1930), *Grundlagen der Analysis*, Teubner, Leipzig 1930.

Maizner Klaus (1995), *Real Numbers*, [w:] H-D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, Springer, New York 1995, ss. 27-53.

Maurin Krzysztof (1991), *Analiza. Cz. II*, PWN, Warszawa 1991.

Mioduszewski Jerzy (1996), *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1996.

Narkiewicz Witold (1977), *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1977.

Nikolić M. (1974), *The relation between Eudoxos' theory of proportions and Dedekind's theory of cuts*, [w:] R. S. Cohn, J. J. Stachel, M. W. Wartofsky (eds) *For Dirk Sturik*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1974, ss. 225-243.

Niven Ivan (1956), *Irrational Numbers*, John Wiley and Sons, Rahway, New Jersey 1956.

Sieklucki Karol (1978), *Geometria i topologia. Część I Geometria*, PWN, Warszawa 1978.

Stein Howard (1990), *Eudoxos and Dedekind: on the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics*, Synthese 84, 1990, ss. 163-211.

Struik Dirk J. (1960), *Krótki zarys historii matematyki. Do końca XIX w.*, tł. P. Szeptycki, PWN, Warszawa 1960.

Weber Heinrich (1895), *Lehrbuch der Algebra*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1895; cytowane wg: wyd. drugie, Braunschweig 1898.

Weyl Herman (1949), *Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 1949.

Więsław Witold (1997), *Matematyka i jej historia*, Nowik, Opole 1997.

Wygodski M. J. (1956), *„Elementy" Euklidesa*, [w:] *O Elementach Euklidesa*, K. Leśniak (red.), tł. J. Turkowska, PWN, Warszawa 1956, ss. 7-105.